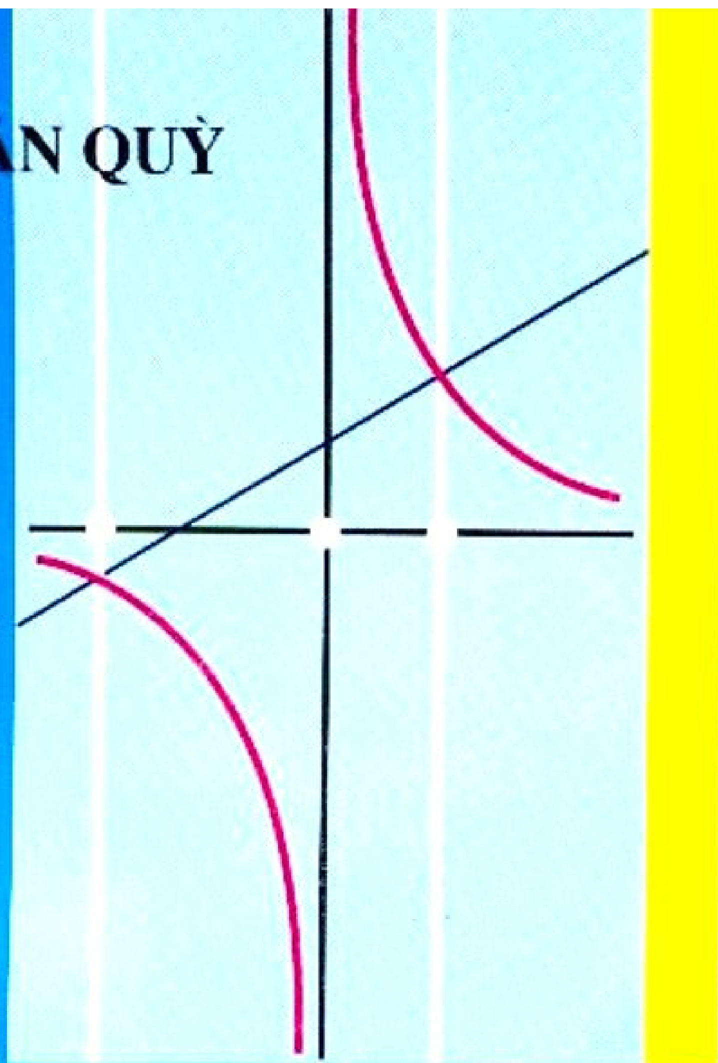
NGUYỄN XUÂN QUỲ



35 ĐỀ TOÁN HAY DÙNG CHO ÔN LUYỆN CUỐI CẤP THCS



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN XUÂN QUỲ

35 ĐỀ TOÁN HAY DÙNG CHO ÔN LUYỆN CUỐI CẤP THCS

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI-2001

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: NGUYỄN VĂN THỎA
Tổng biên tập: NGUYỄN THIỆN GIÁP

Biên tập và sửa bài: TƯỜNG GIANG
NGỌC QUYÊN

Trình bày bìa: TRẦN TIỂU LÂM

Lời nói đầu

Cuốn sách "35 đề toán hay dùng cho luyện cuối cấp THCS" *được biên soạn nhằm cung cấp cho học sinh lớp 9 một tài liệu tham khảo thiết thực và bổ ích để có thể tự ôn tập, củng cố kiến thức, rèn luyện kĩ năng giải toán theo các trọng điểm về hình học và đại số lớp 9.*

Nội dung sách gồm có 2 phần:

Phần thứ nhất: 35 đề toán hay .

Phần thứ hai: Phụ lục - Các đề toán tự kiểm tra .

Với mỗi đề bài ở phần thứ nhất, hãy vận dụng các kiến thức đã học để tự tìm tòi cách giải rồi giải hoàn chỉnh vào vở; với mỗi đề bài ở phần thứ hai, hãy tự làm bài trong khoảng 120 phút để tự đánh giá, thấy cần phải ôn lại kiến thức nào và rút ra được cách tìm tòi lời giải của bài toán.

Tự học theo sách là cách học tốt nhất để nâng cao thêm trình độ của bản thân về kiến thức và kĩ năng giải toán. Mong rằng cuốn sách này sẽ giúp các em đạt kết quả cao trong học toán. Chúc các em thành công.

Tác giả

PHẦN THỨ NHẤT

35 ĐỀ TOÁN HAY

Đề 1

Bài 1. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{3\sqrt{a}-1} - \frac{1}{1+3\sqrt{a}} + \frac{8\sqrt{a}}{9a-1}\right) : (1 - \frac{3\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}+1})$$

a) Rút gọn A;

b) Tìm giá trị của a để $A = \frac{6}{5}$.

Bài 2. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì làm xong trong 4 giờ. Nếu mỗi đội làm một mình để làm xong công việc ấy, thì đội thứ nhất cần thời gian ít hơn so với đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi mỗi đội làm một mình công việc ấy trong bao lâu?

Bài 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Các trung tuyến AA', BB', CC' cắt nhau tại O.

a) Tính diện tích các tứ giác BC'B'A' và BC'B'C theo a.

b) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác A'B'C'.

c) Cho tam giác AOB quay quanh OA, hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của hình được sinh ra.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Lời giải

Bài 1. a) Rút gọn

Điều kiện để A có nghĩa là: $a \geq 0$; $9a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{9}$

$$A = \frac{a + \sqrt{a}}{3\sqrt{a} - 1}.$$

b) Tìm các giá trị của a để $A = \frac{6}{5}$

$\frac{a + \sqrt{a}}{3\sqrt{a} - 1} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 5a + 5\sqrt{a} = 18\sqrt{a} - 6 \Leftrightarrow 5a - 13\sqrt{a} + 6 = 0$ (1).

Đặt $\sqrt{a} = x$, thì (1) có dạng $5x^2 - 13x + 6 = 0$

$\Delta = 169 - 4.5.6 = 169 - 120 = 49 = 7^2$

$x_1 = \frac{13 + 7}{10} = 2$; $x_2 = \frac{13 - 7}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Từ $\sqrt{a} = x \Rightarrow$ $a = x^2$, do đó

$a = x_1^2 = 2^2 = 4;$

$a = x_2^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$

Với $a = 4$; $a = \frac{9}{25}$ thoả mãn điều kiện $a \geq 0$ và $a \neq \frac{1}{9}$.

Vậy với $a = 4$ hoặc $a = \frac{9}{25}$ thì $A = \frac{6}{5}$.

Bài 2. Gọi thời gian mà đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x giờ ($x > 4$) thì thời gian đội thứ hai làm một mình xong công việc là $(x + 6)$ giờ. Như vậy trong một

giờ thì đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc và đội thứ hai làm được $\frac{1}{x+6}$ công việc.

Cả hai đội làm chung thì làm xong công việc trong 4 giờ, nên một giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Do đó có phương trình:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$; $4x + 24 + 4x = x^2 + 6x$

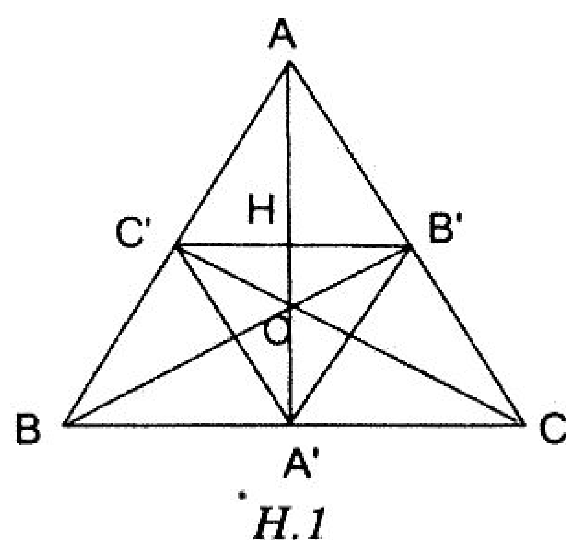
$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

Giải phương trình được $x_1 = 6$; $x_2 = -4$ (loại). Sau khi thử lại, có kết quả:

Đội thứ nhất, thứ hai làm một mình xong công việc trong 6 giờ; 12 giờ.

Bài 3. Hình 1

a) * Vì AA', BB', CC' là các trung tuyến trong ΔABC đều nên A'B = A'C = B'C = B'A = C'A = C'B (1) suy ra C'B'//BA' và C'B' = $\frac{BC}{2}$ = BA' (theo tính chất đường trung bình trong tam giác), do đó BC'B'A' là hình bình hành.



H.1

Nhưng C'B = A'B (theo 1) nên BC'B'A' là hình thoi, nó có hai đường chéo là BB' và C'A'.

Trong tam giác đều ABC đường trung tuyến BB' cũng

là đường cao nên BB' = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; C'A = $\frac{a}{2}$.

Vậy $S_{BC'B'A'} = \frac{1}{2}BB'.C'A' = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

* Vì C'B' // BC và $\hat{B} = \hat{C}$ (= 60°) nên BC'B'C là hình thang cân có đường cao HA' = $\frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

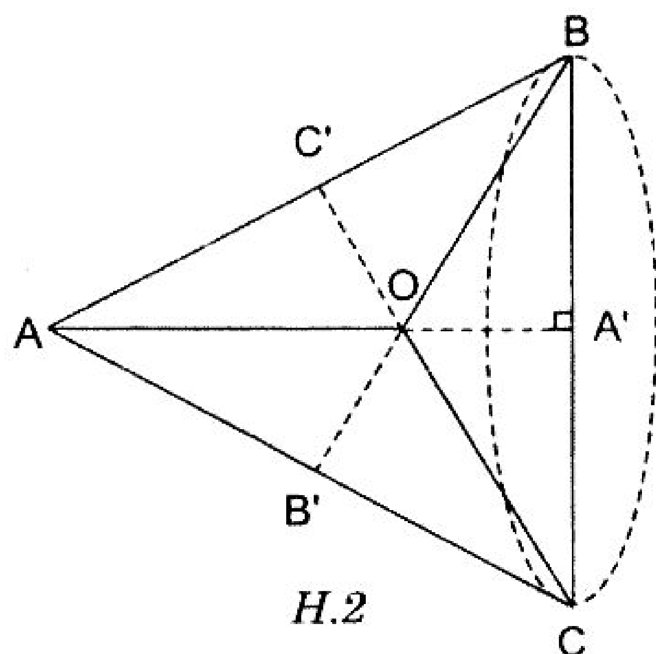
Vậy $S_{BC'B'C} = \frac{1}{2}(C'B' + BC).HA' =$

$= \frac{1}{2}(\frac{a}{2} + a)\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

B) Vì BC'B'A là hình thoi (chứng minh câu a) nên $\widehat{C'B'B} = \widehat{BB'A'}$ hay B'O là phân giác của $\widehat{C'B'A'}$. Chứng minh tương tự có C'O là phân giác của $\widehat{A'C'B'}$.

Như vậy O là giao điểm của hai đường phân giác trong của tam giác A'B'C', nên O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác A'B'C'.

c) Hình 2



H.2

* Khi quay tam giác AOB trọn một vòng quanh OA thì thể tích của hình được sinh ra bằng thể tích của hình nón đỉnh A có đường cao là AA' trừ đi thể tích hình nón đỉnh O có đường cao là OA'. Cả hai hình nón này đều có chung một đáy là đường tròn đường

kính BC. Do đó thể tích V của hình được sinh ra là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.A'B^2 - \frac{1}{3}\pi A'B^2.OA' = \frac{1}{3}\pi A'B^2(AA' - OA').$$

AA' là trung tuyến, là đường cao của ΔABC đều có cạnh bằng a nên $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $OA' = \frac{1}{3}AA' = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy:

$V = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{36}$ (đơn vị thể tích).

* Diện tích toàn phần hình S được sinh ra là diện tích xung quanh của hình nón đỉnh A cộng với diện tích xung quanh hình nón đỉnh O.

$S = \pi A'B\ (AB + OB) = \frac{\pi a}{2}\left(a + \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right)$.

(đơn vị diện tích).

Bài 4. Nhận xét rằng, nếu x = 0 thì M = 0, giá trị này không phải là giá trị lớn nhất. Vậy M đạt giá trị lớn nhất với $x \neq 0$.

Từ đó, có thể chia tử và mẫu cho x^2, được:

$$M = \frac{1}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1}.$$

M đạt giá trị lớn nhất khi $x^2 + \frac{1}{x^2}$ là nhỏ nhất; $x^2 + \frac{1}{x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = \pm 1$. Vậy giá trị lớn nhất của M bằng $\frac{1}{3}$ khi $x = \pm 1$.

Đề 2

Bài 1. Cho biểu thức

$$B = 1 + \left(\frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}.$$

a) Rút gọn B;

b) Cho $B = \dfrac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$ tìm giá trị của a;

c) Chứng minh rằng $B > \dfrac{2}{3}$.

Bài 2. Trong ngày "Hội khoẻ" của một tỉnh, môn bóng đá của học sinh các trường PTTH được tổ chức theo thể thức "đấu vòng tròn" một lượt, tức là mỗi đội được đấu với mỗi đội khác một lần để xếp hạng theo tổng số điểm (thắng: 3, hoà: 1, thua: 0). Có tất cả 15 trận đấu. Hỏi có bao nhiêu đội thi đấu bóng đá?

Bài 3. Cho hai đường tròn tâm O và O' có R > R' tiếp xúc ngoài tại C. Kẻ các đường kính COA, COB. Qua trung điểm M của AB, dựng DE ⊥ AB.

a) Tứ giác ADBE là hình gì? Tại sao.

b) Nối D với C cắt đường tròn tâm O' tại F, chứng minh B, F, E thẳng hàng.

c) Nối D với B cắt đường tròn tâm O' tại G. Chứng minh EC đi qua G.

d) Xét vị trí của MF đối với đường tròn tâm O', vị trí của AE với đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCFE.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

Lời giải

Bài 1. a) Rút gọn B.

Điều kiện để B có nghĩa là: $a > 0$; $a \neq 1$; $a \neq \frac{1}{4}$; $B = \frac{1+a}{1+\sqrt{a}+a}$.

b) Tìm giá trị của a biết $B = \frac{6}{1+\sqrt{6}}$

$$\frac{1+a}{1+\sqrt{a}+a} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{6} + a + a\sqrt{6} = \sqrt{6} + \sqrt{6}.\sqrt{a} + a\sqrt{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - \sqrt{6}.\sqrt{a} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - \sqrt{6}.\sqrt{a} + 1 = 0$$

$$\Delta = 6 - 4 = 2; \sqrt{\Delta} = \sqrt{2}.$$

$$\sqrt{a_1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{a_2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}.$$

c) Biết rằng $\left(\sqrt{a} - 1\right)^2 \geq 0$ nên $a + 1 \geq 2\sqrt{a}$ hay $\sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$.

Do đó có:

$$a + \sqrt{a} + 1 \leq a + \frac{a+1}{2} + 1 = \frac{3}{2}(a+1) \quad (1).$$

Theo điều kiện bài toán thì $a + \sqrt{a} + 1 > 0$ nên chia cả hai vế của (1) cho $\frac{3}{2}(a + \sqrt{a} + 1)$ thì được $\frac{a+1}{a+\sqrt{a}+1} \geq \frac{2}{3}$.

Vì $a \neq 1$ nên dấu bằng không xảy ra, nên $\frac{a+1}{a+\sqrt{a}+1} > \frac{2}{3}$ hay $B > \frac{2}{3}$ với $a > 0$, $a \neq 1$ và $a \neq \frac{1}{4}$.

Bài 2. Gọi số đội thi đấu bóng đá là n (với n là số tự nhiên $n > 2$). Một đội trong số các đội thi đấu bóng đá sẽ đấu với n - 1 đội còn lại, do đó có n - 1 trận đấu. Có tất cả n đội nên có tất cả là n(n - 1) trận thi đấu bóng đá, nhưng mỗi cặp (tức hai đội) chỉ đấu với nhau một trận, nên số trận đấu chỉ có $\frac{n(n-1)}{2}$ trận.

Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n^2 - n = 30 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0.$$

$$\Delta = 1 + 120 = 121 = 11^2$$

$$n_1 = \frac{1+11}{2} = 6; \; n_2 = \frac{1-11}{2} = -5 \text{ (loại)}$$

$n = 6 \Rightarrow n > 2$, thoả mãn điều kiện bài toán.

Thử lại: Một đội phải đấu với 5 đội còn lại, nên đội đó phải đấu 5 trận. Có 6 đội, theo cách tính như trên sẽ có 30 trận đấu.

Nhưng mỗi cặp chỉ đấu với nhau một trận nên số trận đấu sẽ là 30 : 2 = 15. *Trả lời:* Có 6 đội bóng đá.

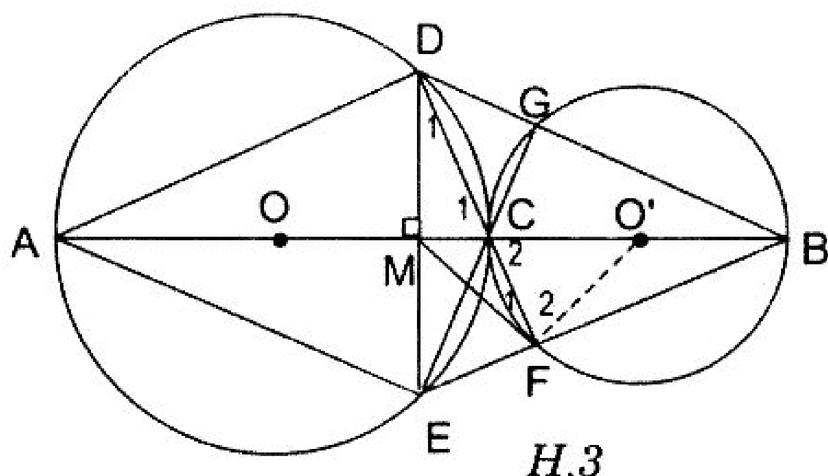
Bài 3. Hình 3

a) Đường kính AC ⊥ DE nên MD = ME.

Tứ giác ADBE có MA = MB, MD = ME, nó là hình bình hành.

Hình bình hành ADBE có AB ⊥ DE, nó là hình thoi.

b) $\widehat{ADF} = 1v$ (góc nộit tiếp chắn nửa đường tròn tâm O), tương tự có $\widehat{BFD} = 1v$, suy ra AD ⊥ DF, FB ⊥ DF do đó BF // AD. Nhưng BE // AD (vì ADBE là hình bình hành).



H.3

Qua điểm B ngoài đường thẳng AD chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với AD mà thôi nên BF ≡ BE, tức là B, F, E thẳng hàng.

c) $\widehat{CGB} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính CB, suy ra CG ⊥ DB.

Trong ΔDEB có hai đường cao DF và BM cắt nhau tại C thì EC phải là đường cao thứ ba của ΔDEB hay CE ⊥ DB.

Từ điểm C ngoài đường thẳng BD chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với BD mà thôi, nên CG ≡ CE hay EC đi qua G.

d) * Vì M là trung điểm của DE nên FM là trung tuyến đi tới cạnh huyền DE của tam giác vuông DFE, do đó MD = MF hay ΔDMF cân, suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{F_1}$ (1).

Trong ΔDMC thì $\widehat{D_1} + \widehat{C_1} = 1v$, nhưng $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (đối đỉnh) và $\widehat{C_2} = \widehat{F_2}$ (vì ΔO'CF cân) nên $\widehat{D_1} + \widehat{F_2} = 1v$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 1v = \widehat{MFO'}$ hay MF $\perp$ O'F, vậy MF là tiếp tuyến của đường tròn tâm O'.

* Tứ giác MCFE có $\widehat{EMC} + \widehat{CFE} = 2v$ nên nó nội tiếp được đường tròn đường kính là EC. Nhưng EA $\perp$ EC (vì $\widehat{AEC} = 1v$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AC), vậy AE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCFE.

Bài 4. Ta có:

$$P = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{x-1})^2} = \left|\sqrt{x-1} + 1\right| + \left|1 - \sqrt{x-1}\right|$$

Biết rằng $|x| + |y| \geq |x + y|$, nên

$$P = \left|\sqrt{x-1} + 1\right| + \left|1 - \sqrt{x-1}\right| \geq \left|\sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1}\right| = 2.$$

Vậy min P = 2 khi $(\sqrt{x-1} + 1)(1 - \sqrt{x-1}) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1 - (x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Đề 3

Bài 1. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{y - x} \right) : \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

a) Rút gọn A;

b) Chứng minh $A \geq 0$.

Bài 2. Lấy một số tự nhiên có hai chữ số chia cho số viết bởi hai chữ số ấy có thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư là 15. Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương của mỗi chữ số đó. Tìm số tự nhiên ấy.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính AOB, COD vuông góc với nhau. Lấy điểm E bất kì trên OA, nối CE cắt đường tròn tại F. Qua F dựng tiếp tuyến Fx với đường tròn, qua E dựng Ey vuông góc với OA. Gọi I là giao điểm của Fx và Ey.

a) Chứng minh I, F, E, O cùng nằm trên một đường tròn

b) Tứ giác CEIO là hình gì, tại sao?

c) Khi E chuyển động trên AB thì I chuyển động trên đường nào?

Bài 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{3} \\ 2x - y + 4z = 30. \end{cases}$$

Lời giải

Bài 1. a) Rút gọn A

Điều kiện để A có nghĩa là: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \neq y$.

$$A = \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}.$$

b) Vì $x \geq 0$ và $y \geq 0$ nên $\sqrt{xy} \geq 0$ (1), do đó

$$x-\sqrt{xy}+y=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2}+\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2+y-\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2+\frac{3y}{4}.$$

Vì $\left(\sqrt{x}-\frac{y}{2}\right)^2\geq 0$ và $\frac{3y}{4}\geq 0$ nên $x-\sqrt{xy}+y\geq 0$ (2).

Từ (1) và (2) có $A=\dfrac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}\geq 0$ với mọi x, y không đồng thời bằng 0.

*Bài 2.*Gọi chữ số hàng đơn vị là chữ số hàng chục của số phải tìm là y và x (x, y là số tự nhiên từ 1 đến 9), số phải tìm có dạng $\overline{xy}=10x+y$. Lấy $10x+y$ chia cho số có hai chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại tức là $\overline{yx}=10y+x$ thì được thương là 4 và dư là 15, do đó có phương trình (1):

$10x+y=4(10y+x)+15$ hay

$10x+y=40y+4x+15$ (1)

Lấy đi $10x+y$ trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương của mỗi chữ số đó, nên có phương trình (2):

$$10x+y-9=x^2+y^2 \qquad (2)$$

Vậy có hệ phương trình:

$$\begin{cases}10x+y=40y+4x+15(1)\\10x+y-9=x^2+y^2(2)\end{cases}$$

Từ (1) có: $10x-4x=40y-y+15$

$$6x=39y+15$$

$$x=\frac{39y+15}{6} \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta có:

$$10\frac{39y+15}{6}+y-9=\left(\frac{39y+15}{6}\right)^2+y^2$$

$$\frac{390y+150}{6}+y-9=\frac{1521y^2+1170y+225}{36}+y^2$$

$2340y + 900 + 36y - 324 = 1521y + 1170y + 225 = 36y^2$

$1557y^2 - 1206y - 351 = 0$

$173y^2 - 134y - 39 = 0$

$\Delta' = 67^2 + 172.39 = 4489 + 6747 = 11236 = 106^2$

$$y_1=\frac{67+106}{173}=1;\ y_2=\frac{67-106}{173}=-\frac{39}{173}\text{ (loại)}$$

$$x=\frac{39y+15}{6}=\frac{39.1+15}{6}=\frac{54}{6}=9.$$

$x = 9$, $y = 1$ thoả mãn điều kiện bài toán, suy ra số phải tìm là 91.

Thử lại: $91 = 4.19 + 15 = 76 + 15$

$91 - 9 = 9^2 + 1^2 \Leftrightarrow 82 = 81 + 1$

Trả lời: Số tự nhiên có hai chữ số phải tìm là 91

Ghi chú: Có thể giải bài toán này bằng cách sau:

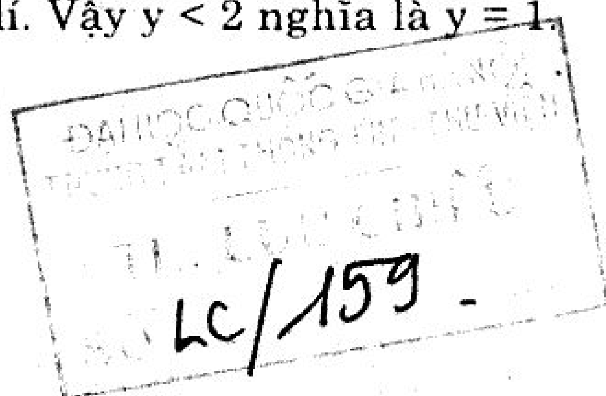
Gọi số phải tìm là $\overline{xy}$ (với $0 < y < x < 10$). Theo đầu bài có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\overline{xy}=4.\overline{yx}+15 & (1)\\ \overline{xy}-9=x^2+y^2 & (2)\end{cases}$$

Nhận thấy rằng: nếu $y = 2$ thì $22 < \overline{yx}$ và (1) trở thành $\overline{xy} > 4.22 + 15 = 103$, vô lí. Vậy $y < 2$ nghĩa là $y = 1$.

Thay $y = 1$ vào (2) có:

$10x + 1 - 9 = x^2 + 1$

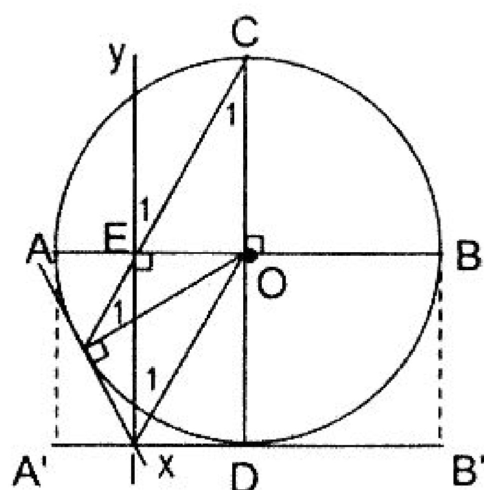


$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$, suy ra $x_1 = 1$ (loại vì $y < x$), $x_2 = 9$.

Vậy số phải tìm là 91.

Bài 3. Hình 4

a) Fx là tiếp tuyến với đường tròn tâm O nên $OF \perp Fx$ $\Rightarrow \widehat{IFO} = 1v$, $yE \perp OA$ (gt) $\Rightarrow \widehat{IEO} = 1v$.



H.4

Như vậy E, F cùng nhìn OI dưới một góc vuông nên E, F phải nằm trên đường tròn đường kính IO (theo quỹ tích cung chứa góc), vậy I, F, E, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) EI, CD cùng vuông góc với AB nên EI // CD $\Rightarrow$ $\widehat{C_1} = \widehat{E_1}$ (so le trong); $\widehat{F_1} = \widehat{I_1}$ (góc nội tiếp cung chắn $\overset{\frown}{EO}$ của đường tròn đường kính IO), $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ vì ΔFCO cân, do đó suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{I_1}$.

$\widehat{E_1}, \widehat{I_1}$ bằng nhau, ở vị trí đồng vị nên CE // IO.

Tứ giác CEIO có EI // CO và CE // IO, nó là hình bình hành (theo định nghĩa).

c) Vì CEIO là hình bình hành nên IE = CO = R. Theo giả thiết $IE \perp AB$, như vậy điểm I luôn cách AB cho trước một đoạn không đổi bằng R.

Do đó, khi E chuyển động trên đoạn AB thì I chuyển động trên đoạn A'B' song song với AB và cách AB một đoạn bằng R (theo quỹ tích song song).

Bài 4. Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} = t \Rightarrow x = 5t, y = 7t, z = 3t$.

Thay các giá trị của x, y, z vào phương trình (2) có:

$10t - 7t + 12t = 30 \Leftrightarrow 15t = 30 \Leftrightarrow t = 2$.

$x = 5t = 10; y = 7t = 14; z = 3t = 6$.

Nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x = 10; y = 14$ và $z = 6$.

Đề 4

Bài 1. Cho biểu thức

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}\right).$$

$$.\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}\right) : \frac{a - b}{a + \sqrt{ab} + c}\right]$$

a) Rút gọn Q;

b) Tính số trị của Q với a = 16; b = 4.

Bài 2. Hai đỉnh A và B cách nhau 180 km. Cùng một lúc, một ô tô từ A đi đến B và một xe máy đi từ B về A. Hai xe gặp nhau tại thị trấn C. Từ C đến B ô tô đi hết 2 giờ, còn từ C về A xe máy đi hết 4 giờ 30'. Tính vận tốc của xe ô tô và xe máy biết rằng trên đường AB hai xe đều chạy với vận tốc không đổi.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông góc tại A và có AB = 8cm, AC = 6cm, BC = 10cm. Các điểm M, E, F lần lượt là

trung điểm của BC, AB, AC. Dựng đường cao AH.

a) Chứng minh rằng, năm điểm A, E, M, H, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính tỉ số giữa diện tích của ΔMFA và ΔBAC.

c) Tính thể tích của hình được sinh ra khi cho ΔABM quay trọn một vòng quanh BM.

d) Tính diện tích của hình được sinh ra khi cho ΔABM quay trọn một vòng quanh AB.

Bài 4. Cho abc = 1. Tính tổng:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ac}$$

Lời giải

Bài 1. Rút gọn Q

Điều kiện để Q có nghĩa là: $a \geq 0$; $b \geq 0$; $a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$.

$$Q = \frac{1}{a-\sqrt{ab}+b}$$

Tính số trị của Q

$$Q = \frac{1}{a-\sqrt{ab}+b} = \frac{1}{16-\sqrt{16.4}+4} = \frac{1}{16-8+4} = \frac{1}{12}.$$

Bài 2. Gọi vận tốc của xe ô tô là x km/h và của xe máy là y km/h (x > 0; y >0).

Sau một thời gian, hai xe gặp nhau tại C, xe ô tô phải chạy tiếp 2 giờ nữa thì tới B nên quãng đườn CB dài 2x km; còn xe máy phải đi tiếp 4g 30 phút hay 4,5 giờ thì sẽ tới A nên quãng đường CA dài 4,5y km, do đó có phương trình (1):

$$2x + 4,5y = 180 \qquad (1).$$

Ô tô chạy với vận tốc x km/h nên thời gian đi quãng đường AC là $\frac{4,5y}{x}$ giờ, xe máy đi với vận tốc y km/h thì thời gian đi quãng đường CB là $\frac{2x}{y}$ giờ. Vì hai xe khởi hành cùng một lúc và gặp nhau ở thị trấn C, như vậy đến lúc hai xe gặp nhau thì hai xe đã đi trong một khoảng thời gian bằng nhau, nên có ohương trình (2):

$$\frac{4,5y}{x} = \frac{2x}{y} \text{ hay } 9y^2 = 4x^2 \qquad (2)$$

Vậy có hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 4,5y = 180 & (1) \\ 9y^2 = 4x^2 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) có $y = \frac{2}{3}x \quad (3)$.

Thay (3) vào (1) có $2x + 4,5 \cdot \frac{2}{3}x = 180 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3}x = 180 \Leftrightarrow 2x + 3x = 180 \Leftrightarrow x = 36.$

$y = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24.$

Với x = 36; y = 24 đều thoả mãn điều kiện bài toán ($x > 0; y > 0$).

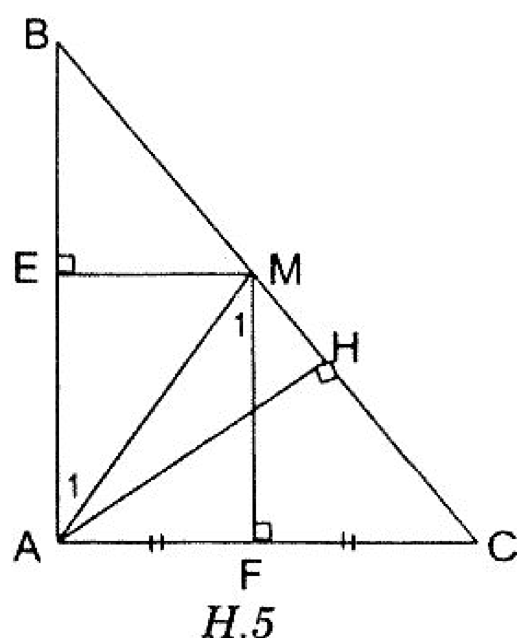
Thử lại: 2x + 4,5 y = 2.36 + 4,5.24 = 72 + 108 = 180.

Trả lời: Vận tốc của xe ô tô, xe máy là 36km/h, 24km/h.

Bài 3. Hình 5

a) Vì M là trung điểm của BC nên AM là trung tuyến thuộc cạnh huyền, do đó AM = MB = MC, vậy ΔMAB, ΔMAC cân.

Vì E, F là trung điểm BA và AC nên ME, MF là các trung tuyến đồng thời là các đường cao của tam giác cân MBA và AMC, suy ra $\hat{E} = \hat{F} = 1v$.



H.5

Nhận thấy E, H, F cùng nhìn AM dưới một góc vuông nên E, H, F nằm trên đường tròn đường kính AM (theo quỹ tích cung chứa góc), vậy 5 điểm A, E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn.

b) $\widehat{M_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong), $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (vì ΔMAB cân)

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{B_1}$ do đó ◺ MFA ∽ ◺BAC. Vậy

$$\frac{dtMFA}{dtBAC} = \left(\frac{MF}{BA}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

c) Thể tích V phải tìm khi quay ΔABM một vòng quanh BM là hiệu giữa thể tích hình nón đỉnh B đường cao BH và thể tích hình nón đỉnh M đường cao MH với đáy có bán kính cùng bằng AH:

$$V = \frac{1}{3}\pi AH^2 (BH - MH)$$

$\Delta AHC \sim \Delta BAC$ vì có $\hat{C}$ chung, nên

$$\frac{AH}{BA} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AH = \frac{BA.AC}{BC} = \frac{8.6}{10} = 4{,}8.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC có AH là đường cao:

$$AC^2 = HC \,.\, BC \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = \frac{36}{10} = 3{,}6.$$

$BH = BC - HC = 10 - 3{,}6 = 6{,}4.$

$MH = MC - CH = 5 - 3{,}6 = 1{,}4.$

$$V = \frac{1}{3}(4{,}8)^2\,(6{,}4 - 1{,}4) = \frac{1}{3}\pi 23{,}04.5 = \pi\ 38{,}4\ (cm^3).$$

d) Khi quay ΔABM một vòng quanh AB tạo ra hai hình nón có đáy chung và hai đỉnh đối xứng với nhau qua EM. Vậy diện tích toàn phần S của nó là:

$S = 2.\pi rl = 2.\pi.EM.\ BM = 2.\ \pi.3.5 = 30\pi\ (cm^2).$

Bài 4. Áp dụng tính chất cơ bản của phân thức đối với hai phân thức đầu tiên và với abc = 1, có

$$\frac{1}{1+a+ab} = \frac{1.c}{(1+a+ab)c} = \frac{c}{c+ac+1},$$

$$\frac{1}{1+b+bc} = \frac{1.ac}{(1+b+bc).ac} = \frac{ac}{1+ac+c},$$

do đó:

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}$$

$$= \frac{c}{c+ac+1} + \frac{ac}{1+ac+c} + \frac{1}{1+c+ac} = \frac{c+ac+1}{c+ac+1} = 1.$$

Đề 5

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}$ với $x \geq 2$;

b) $B = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

với $a \geq 0$; $b \geq 0$.

Bài 2. Một ca nô chạy xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi lại chạy ngược dòng từ bến B về bến A mất tất cả 4 giờ. Tính vận tốc của canô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30km và vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 3. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và AB = a. Đường tròn nội tiếp ABCD tiếp xúc với AB, BC, CD, DA tại E, F, G, H.

a) Tính diện tích hình thoi, hình tròn nội tiếp và diện tích hai tứ giác EFGH, EBCG theo a.

b) Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại giao điểm của AC, BD lấy $OS = b\sqrt{3}$.

1) Chứng minh SA = SC; SB = SD. Tính độ dài SA, SB.

2) Tính thể tích S_{ABCD} và thể tích hình nón có đỉnh là S, đường cao SO và đáy là hình tròn nội tiếp hình thoi.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - 4x\sqrt{3} + 8 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2. Không giải phương trình trên, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2}$$

Lời giải

Bài 1. a) Bình phương hai vế có:

$$A^2 = x - \sqrt{x^2 - 4} + x + \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{\left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)} =$$

$$= x + x + 2\sqrt{x^2 - x^2 + 4} = 2x + 4.$$

Vậy $A = \sqrt{2(x+2)}$.

b) *Đáp số*: B = 1.

Bài 2. Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x km/h thì vận tốc của ca nô lúc xuôi dòng là (x + 4) km/h và vận tốc ca nô lúc ngược dòng là (x - 4) km/h.

Quãng sông AB dài 30 km, do đó thời gian ca nô đi xuôi dòng là $\frac{30}{x+4}$h và thời gian ngược dòng là $\frac{30}{x-4}$h.

Thời gian cả đi lẫn về là 4 giờ, nên có phương trình:

$$\frac{30}{x+4} + \frac{30}{x-4} = 4.$$

$$30x - 120 + 30x + 120 = 4x^2 - 64$$

$$4x^2 - 60x - 64 = 0$$

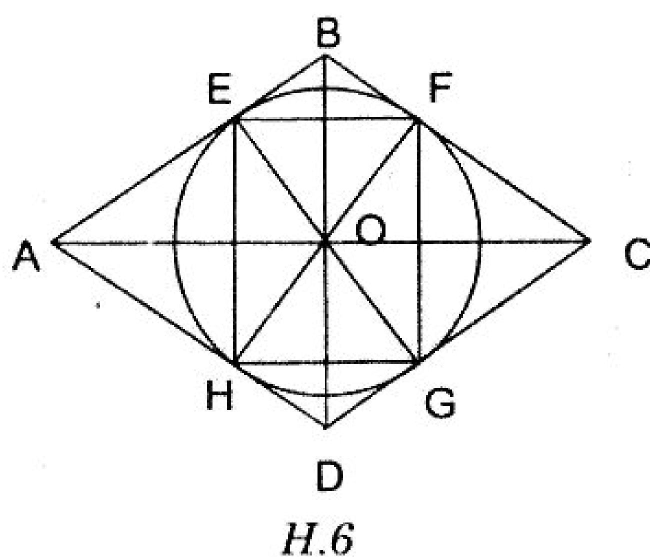
$$x^2 - 15x - 16 = 0$$

Giải phương trình được $x_1 = 16$; $x_2 = -1$ (loại).

Sau khi thử lại, có kết quả: vận tốc của canô khi nước yên lặng là 16km/h.

Bài 3. a) Hình 6

- Tam giác ABC có AB = AD và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ΔABD đều, suy ra AB = AD = DB = a.



H.6

Trong tam giác vuông AOB theo định lí Pitago có:

$$OA = \sqrt{AB^2 = OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ do đó } AC = a\sqrt{3}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

• Trong tam giác vuông AOB có $OE \perp AB$, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, có:

$$OB^2 = EB.AB \Rightarrow EB = \frac{OB^2}{AB} = \frac{\frac{a^2}{4}}{a} = \frac{a}{4}, \text{ suy ra } AE = \frac{3}{4}a;$$

$$\text{và } OE^2 = EB\ .\ EA = \frac{a}{4}\cdot\frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{\text{hình nón}} = \pi.OE^2 = \frac{3\pi a^2}{16}.$$

• AB // DC, $OE \perp AB \Rightarrow OE \perp DC$ tức là E, O, G thẳng hàng. Tương tự có F, O, H thẳng hàng. Dễ dàng chứng minh được OE = OF = OG = OH.

Tứ giác EFGH có OE = OG, OF = OH, nó là hình bình hành. Hình bình hành EFGH có EG = FG, nó là hình chữ nhật. Trong ΔABC có EF // AC nên theo định lí Talét có:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow EF = \frac{EB.AC}{AB} = \frac{\frac{a}{4}\cdot a\sqrt{3}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Tương tự trong ΔABD có:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BD} \Rightarrow EH = \frac{AE.BD}{AB} = \frac{\frac{3}{4}a.a}{a} = \frac{3}{4}a.$$

$$S_{EFGH} = \frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4}a = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}.$$

• Tứ giác EBCG là hình thang vuông, có $EG = 2OE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $EB = DG$; $GC = AE$.

Vậy EG chia hình thoi ABCD thành hai hình thang có diện tích S bằng nhau.

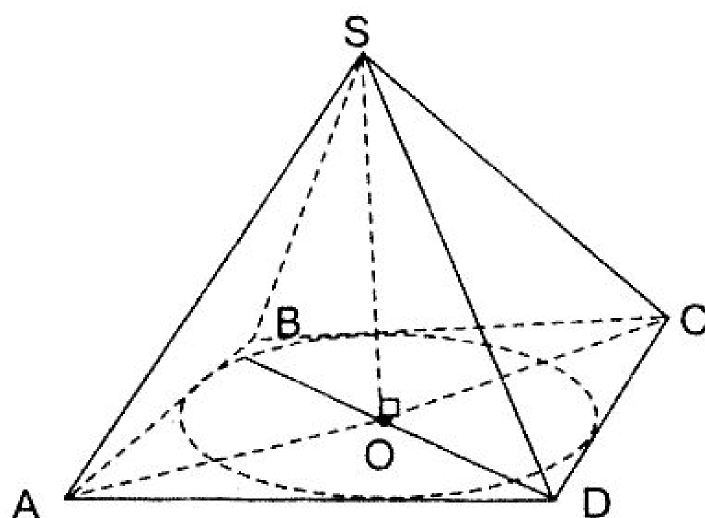
Vậy $S_{EBCG} = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Hình 7

1) Vì $OS \perp (ABCD)$ $\Rightarrow SO \perp AC$, nhưng $OA = OC$, nên ΔSAC cân suy ra $SA = SC$.

Chứng minh tương tự, có $SB = SD$.

• Trong tam giác vuông SOA, theo Pitago có:



H.7

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2}$$
$$= \sqrt{\left(b\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)2} = \sqrt{3b^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3\left(a^2 + 4b^2\right)} = SC.$$

Tương tự, trong tam giác vuông SOB có:

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2}$$
$$= \sqrt{\left(b\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{3b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{12b^2 + a^2} = SD.$$

2) Thể tích hình chóp S_{ABCD}

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot b\sqrt{3} = \frac{1}{2}a^2b.$$

Thể tích hình nón

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 \cdot b\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3a^2}{16} \cdot b\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}a^2b}{16}\cdot$$

Bài 4. Theo định lí Viét có:

$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = 8; \; S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4\sqrt{3}$$

Biến đổi Q để các biểu thức trong Q có dạng x_1x_2 và $x_1 + x_2$:

$$Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1x_2^3} = \frac{6\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2}{5x_1x_2\left(x_2^2 + x_1^2\right)}$$

$$= \frac{6(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{5x_1x_2\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right]}\cdot$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{6\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2.8}{5.8\left[\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2.8\right]} = \frac{6.16.3 - 16}{40(16.3 - 16)}$$

$$= \frac{16(18-1)}{40.16(3-1)} = \frac{17}{80}\cdot$$

Đề 6

Bài 1. Cho biểu thức

$$M = 1 : \left(\frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4-x} - \frac{2}{4-2\sqrt{x}}\right) : \frac{3x - 4\sqrt{x}}{8\left(2+\sqrt{x}\right)^2\left(2-\sqrt{x}\right)}$$

a) Rút gọn M;

b) Tìm giá trị của x để M = 20.

Bài 2. Có hai thửa đất hình chữ nhật: thửa thứ nhất có chu vi là 240m, thửa thứ hai có chiều dài, chiều rộng hơn chiều dài, chiều rộng của thửa thứ nhất là 15m. Tính chiều dài, chiều rộng của mỗi thửa đất biết rằng tỉ số diện tích giữa thửa thứ nhất và thửa thứ hai là $\frac{5}{8}$.

Bài 3. Cho nửa đường tròn đường kính COD = 2R. Dựng Cx, Dy vuông góc với CD. Từ điểm E bất kì trên nửa đường tròn, dựng tiếp tuyến với đường tròn, cắt Cx tại P, cắt Dy tại Q.

a) Chứng minh tam giác POQ vuông; tam giác POQ và tam giác CED đồng dạng.

b) Tính tích CP và DQ theo R.

c) Khi $PC = \frac{R}{2}$, hãy chứng minh rằng, tỉ số diện tích ΔPOQ và ΔCED bằng $\frac{25}{16}$.

d) Tính thể tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn tâm O và hình thang vuông CPQD khi chúng cùng quay theo một chiều và trọn một vòng quanh CD.

Bài 4. Cho a - b = 5, tính số trị của biểu thức:

a) $b(b - 3) + a(a + 3) - 2ab$

b) $\frac{4a-b}{3a+5}+\frac{3b-a}{2b-5}$.

Lời giải

*Bài 1.*a) Rút gọn M

Điều kiện để M có nghĩa là: $x \geq 0$; $4 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$.

$M = 4(2 + \sqrt{x})$.

b) Tìm giá trị của x để M = 20.

$M = 4(2 + \sqrt{x}) = 20 \Rightarrow 2 + \sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$.

*Bài 2.*Gọi chiều dài, chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật thứ nhất lần lượt là x, y ($x > y > 0$, tính bằng mét) thì chiều dài, chiều rộng của thửa thứ đất thứ hai là $(x + 15)$m và $(y + 15)$m.

Biết chu vi của thửa thứ nhất là 240m thì nửa chu vi là 120m, do đó có phương trình (1):

$$x + y = 120 \quad (1)$$

Diện tích (tính bằng m^2) của thửa thứ nhất và thứ hai lần lượt là xy và $(x + 15)(y + 15)$, có phương trình (2):

$$\frac{xy}{(x+15)(y+15)} = \frac{5}{8} \qquad (2)$$

Vậy có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 120 & (1) \\ \dfrac{xy}{(x+15)(y+15)} = \dfrac{5}{8} & (2) \end{cases}$

Rút x từ (1) thay vào (2) rồi biến đổi được phương trình:

$y^2 - 120y + 3375 = 0$.

Giải phương trình trên được $y_1 = 75$; $y_2 = 45$ suy ra $x_1 = 45$; $x_2 = 75$. Sau khi thử lại, có kết quả:

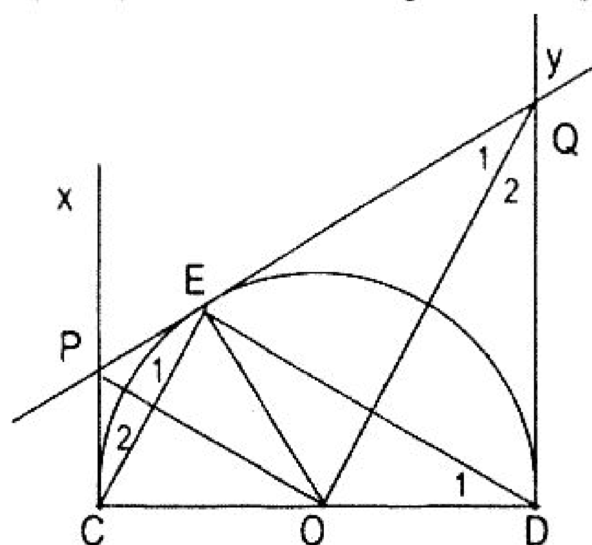
Chiều dài, chiều rộng của thửa vườn thứ nhất là 75m; 45m.

Chiều dài, chiều rộng của thửa vườn thứ hai là 90m; 60m.

Bài 3. Hình 8

a) • PC, QD vuông góc với CD nên là 2 tiếp tuyến của đường tròn O; PC; PE là hai tiếp tuyến của đường O cùng xuất phát từ P nên $\widehat{P_1} = \widehat{P_2} = \frac{\widehat{P}}{2}$.

Tương tự có $\widehat{Q_1} = \widehat{Q_2} = \frac{\widehat{Q}}{2}$.



H.8

PC ⊥ CD; QD ⊥ CD (theo giả thiết) ⇒ PC // QD nên $\widehat{P} + \widehat{Q} =$ 2v. Vậy $\widehat{P_1} + \widehat{Q_1} =$ 1v. Tam giác POQ có $\widehat{P_1} + \widehat{Q_1} =$ 1v suy ra $\widehat{POQ} =$ 1v nên ΔPOQ vuông.

• $\widehat{CED} =$ 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính CD). Tứ giác OEQD có $\widehat{OEQ} + \widehat{ODQ} =$ 2v, nó nội tiếp được đường tròn đường kính OQ, nên $\widehat{Q_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OE}$ của đường tròn đường kính OQ).

⊿POQ và ⊿CED có $\widehat{Q_1} = \widehat{D_1}$ nên ⊿POQ ∽ ⊿CED

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác POQ có $OE^2 = EP.\,EQ$, nhưng EP = CP và EQ = QD (theo tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm đến đường tròn), nên $OE^2 = R^2 = PC.QD$

c) Biết rằng: nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số hai diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng, do đó:

$$\frac{dtPOQ}{dtCED} = \left(\frac{PQ}{CD}\right)^2.$$

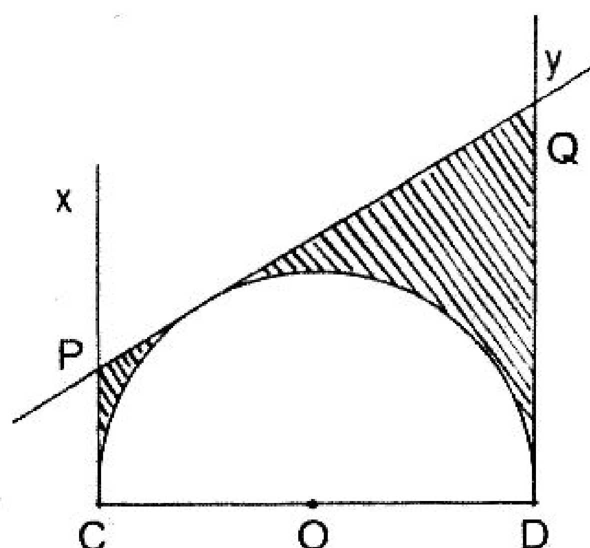
Theo câu b) thì CP.DQ = R^2 nên $DQ = \frac{R^2}{CP}$.

Nhưng $CP = \frac{R}{2}$ (theo giải thiết) do đó $DQ = R^2 : \frac{R}{2} = 2R$.

$PQ = PE + EQ = PC + DQ = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5R}{2}$.

Vậy $\frac{dtPOQ}{dtCEQ} = \left(\frac{5R/2}{2R}\right)^2 = \frac{25R^2/4}{4R^2} = \frac{25}{16}$.

d) Hình 9



H.9

Nửa đường tròn tâm O đường kính CD khi quay trọn một vòng quanh CD tạo ra khối cầu tâm O bán kính R.

Hình thang vuông CPQD quay trọn một vòng quanh CD tạo ra hình nón cụt có các bán kính đáy là PC, DQ và có đường cao là CD.

Vậy thể tích V cần tính bằng thể tích hình nón cụt trừ đi thể tích hình cầu, tức là:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(PC^2 + DQ^2 + PC.DQ\right).CD - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R^2}{4} + 4R^2 + \frac{R}{2}.2R\right).2R - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{21R^2}{4} \cdot 2R - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{13\pi R^3}{6}$$

Bài 4. a)

$b(b - 3) + a(a + 3) - 2ab = b^2 - 3b + a^2 + 3a - 2ab =$

$= (a^2 - 2ab + b^2) = 3(a - b) = (a - b)^2 + 3(a - b) = 5^2 + 3.5 = 40.$

b) $$\frac{4a-b}{3a+5}+\frac{3b-a}{2b-5}=\frac{3a+(a-b)}{3a+5}+\frac{2b+(b-a)}{2b-5}$$

$$=\frac{3a+(a-b)}{3a+5}+\frac{2b-(a-b)}{2b-5}=\frac{3a+5}{3a+5}+\frac{2b-5}{2b-5}=1=1=2.$$

Đề 7

Bài 1. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Bài 2. Người ta hoà 8 kg chất lỏng loại một với 6 kg chất lỏng loại hai thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3. Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng loại một lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại hai là 200 kg/m^3. Tính khối lượng riêng của mỗi loại chất lỏng.

Bài 3. Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AA', BB', CC' gặp nhau tại H và cắt đường tròn tại E, F, I. Vẽ đường kính AD.

a) Các tứ giác BHCD, BCDE là hình gì, tại sao?

b) Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác A'B'C' và tam giác EFI.

c) Kéo dài DH cắt đường tròn O tại M. Chứng minh rằng M là giao điểm của đường tròn O và đường tròn ngoại tiếp tứ giác AC'HB'.

d) Khi tam giác ABC là đều thì các kết luận ở các câu a), b), c) thế nào?

Bài 4. Tính tổng:

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$$

Lời giải

Bài 1. Điều kiện của x là $x \geq 1$, nên $\sqrt{x + \sqrt{x}} > 0$.

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2 - \sqrt{x^2 - x}\right] > 3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[x + \sqrt{x} - \sqrt{x(x-1)}\right] > 3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x-1}\right) > 3\sqrt{x} \quad (2).$$

Vì $x \geq 1$ do đó $\sqrt{x} > 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x-1}\right) > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x > x - 1 + \frac{1}{4} + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow x - 1 < \frac{9}{16} \Leftrightarrow x < \frac{25}{16}.$$

Kết hợp với $x \geq 1$ ta có nghiệm $1 < x < \frac{25}{16}$.

Bài 2. Gọi khối lượng riêng của chất lỏng loại một là $x kg/m^3$ ($x > 200$) thì khối lượng riêng của chất lỏng loại hai là $(x - 200)$ kg/m^3, ta có phương trình:

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x - 200} = \frac{14}{700}$$

$8.700 (x - 200) + 6.700x = 14x (x - 200)$

$5600x - 112000 + 4200x = 14x^2 - 2800x$

$14x^2 - 12600x + 1120000 = 0$

$x^2 - 900x + 80000 = 0$

Giải phương trình được $x_1 = 800$; $x_2 = 100$ (loại). Sau khi thử lại có kết quả:

Khối lượng riêng của loại chất lỏng loại một, loại hai là 800 kg/m³; 600 kg/m³.

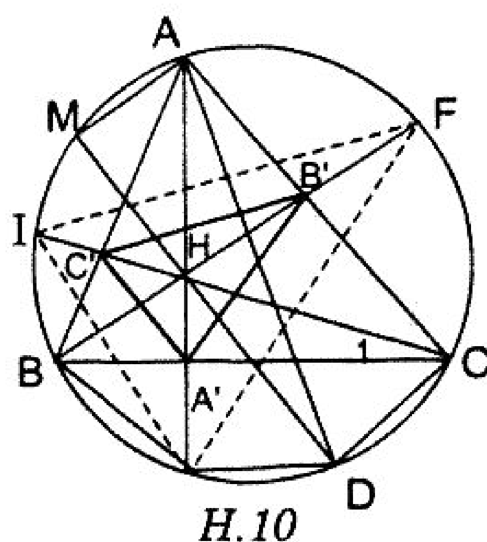
Bài 3. Hình 10

a) • $\widehat{ACD} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD) suy ra $DC \perp AC$, $BB' \perp AC$ (gt) do đó BH // DC.

Tương tự có CH // DB.

Tứ giác BHCD có BH//DC và CH//DB, nó là hình bình hành.

• $\widehat{AED} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD) suy ra $DE \perp AE$, $CB \perp AE$ (gt), do đó CB // ED, nên BCDE là hình thang.



H.10

Do CB//ED nên $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EB} \Rightarrow \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{BCD}$. Hình thang BCDE có $\widehat{CBE} = \widehat{BCD}$, nó là hình thang cân.

b) • Tứ giác A'HB'C có $\widehat{A'} + \widehat{B'} = 2v$ nên nội tiếp được đường tròn, suy ra $\widehat{B'_1} = \widehat{C_1}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HA'}$).

B' và C' cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên ◊BC'B'C nội tiếp được đường tròn, suy ra $\widehat{B'_2} = \widehat{C_1}$ (2) (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC'}$).

Từ (1) và (2) suy ra B'H là phân giác của $\widehat{C'B'A'}$.

Chứng minh tương tự có C'H là phân giác của $\widehat{B'C'A'}$

Vậy H là giao điểm của hai đường phân giác trong của tam giác A'B'C' nên H là tâm đường tròn nội tiếp ΔA'B'C'.

• $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BI}$ của đường tròn tâm O) theo (2) thì $\widehat{B'_2} = \widehat{C_1}$, do đó $\widehat{F_1} = \widehat{B'_2}$ (3).

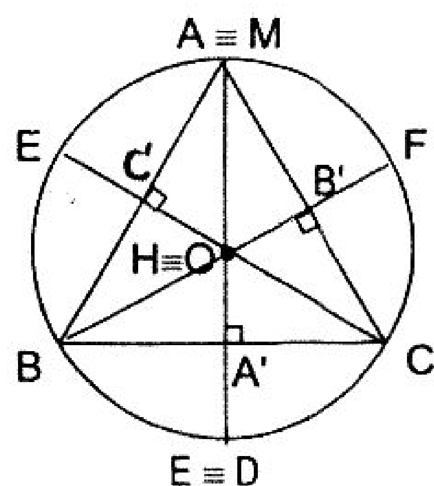
$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), $\widehat{A_1} = \widehat{F_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$ của đường tròn tâm O), suy ra $\widehat{F_2} = \widehat{C_1}$ (4).

Từ (2), (3) và (4) có $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ tức FH là phân giác trong các góc IFE. Chứng minh tương tự có IH là phân giác trong các góc FIE.

Vậy H là giao điểm của hai đường phân giác trong của ΔIFE nên H là tâm đường tròn nội tiếp ΔIFE.

c) $\widehat{AMD}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD). Các điểm M, C', B' cùng nhìn AH dưới một góc vuông nên năm điểm M, A, B', H, C' cùng nằm trên đường tròn đường kính AH hay M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác AC'HB'.

Như vậy M nằm trên đường tròn tâm O, M lại nằm trên đường tròn đường kính AH, vậy M là giao điểm của đường tròn tâm O và đường tròn ngoại tiếp ◊AC'HB'.



H.11

d) Hình 11. Khi ΔABC đều thì H ≡ O và E ≡ D, M ≡ A nên:

• Với câu A): Hình bình hành BHCD sẽ là hình thoi.

Hình thang BCDE sẽ là tam giác cân BCD (hay ΔBCE cân)

• Với câu b): Kết quả không thay đổi

• Với câu c): Vì $M \equiv A$ nên M vẫn là giao điểm của đường tròn tâm O và đường tròn ngoại tiếp $\lozenge AC'HB'$. (Hai đường tròn tiếp xúc trong tại $A \equiv M$).

Bài 4. Nhận thấy:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)n}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Do đó, tổng S đã cho được viết thành:

$$S=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+...+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

Đề 8

Bài 1. Giải phương trình:

a) $|2x - 1| = |2x - 3|$;

b) $\sqrt{x^2 - 4x = 4} + x = 8.$

Bài 2. Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi là 48 cm. Người ta cắt bỏ ở mỗi góc một hình vuông có cạnh 2cm rồi gấp lên thành hình hộp chữ nhật không có nắp có thể tích là 96 cm^3 . Tính các kích thước của tấm tôn hình chữ nhật.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở trên đường tròn. Qua A dựng tiếp tuyến Ax. Trên Ax lấy một điểm Q bất kì, dựng tiếp tuyến QB.

a) Chứng minh tứ giác QBOA nội tiếp được đường tròn.

b) Gọi E là trung điểm của QO, tìm quỹ tích của E khi Q chuyển động trên Ax.

c) Hạ BK vuông góc với Ax, BK cắt QO tại H. Chứng minh OBHA là hình thoi và suy ra quỹ tích của điểm H.

Bài 4. Phân tích thành nhân tử

$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$.

Lời giải

Bài 1. a) Giải phương trình

$$|2x - 1| = |2x - 3| \qquad (1)$$

Nhận thấy hai vế của phương trình (1) không âm, nên

(1) $\Leftrightarrow |2x - 1|^2 = |2x - 3|^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = 1$.

b) Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} + x = 8$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| + x = 8 \ (1)$$

* Nếu $x \geq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x - 2 + x = 8 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$.

* Nếu $x < 2$ thì (1) $\Leftrightarrow 2 - x + x = 8$, vô nghiệm,

Vậy nghiệm của phương trình $x = 5$.

Bài 2. Gọi chiều rộng của tấm tôn là x cm, vì tấm tôn có chu vi là 48 cm nên nửa chu vi bằng 24cm, do đó chiều dài tấm tôn là $(24 - x)$cm. Ta có điều kiện $0 < x < 12$.

Khi cắt bỏ ở 4 góc bốn hình vuông có cạnh là 2cm thì chiều rộng sẽ là x – 4 chiều dài sẽ là 24 – x – 4 = 20 – x, do đó diện tích đáy hình hộp chữ nhật là: (x – 4)(20 – x).

Hình hộp chữ nhật có thể tích $96cm^3$ và chiều cao bằng 2cm nên diện tích đáy là: 96 : 2 + 48 (cm^2).

Vậy có phương trình: $(x - 4)(20 - x) = 48$

$$20x - 80 - x^2 + 4x = 48$$

$$x^2 - 24x + 128 = 0$$

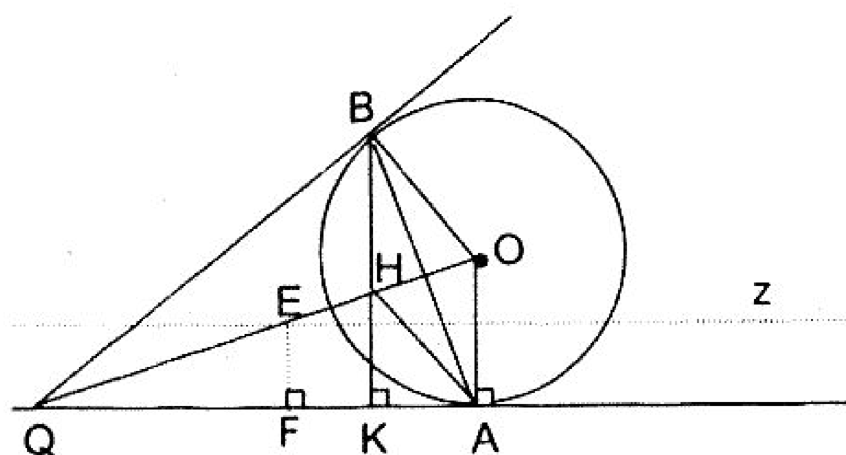
Giải phương trình được $x_1 = 16$ (loại); $x_2 = 8$. Sau khi thử lại, có kết quả:

Chiều rộng, chiều dài tấm tôn là 8cm; 16 cm.

Bài 3. Hình 12

a) QA, QB là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O nên OA, OB vuông góc với QA, QB hay $\widehat{OAQ} = \widehat{OBQ} = 1v$.

b) Từ E hạ EF ⊥ QA thì EF là đường trung bình trong tam giác vuông QOA, nên $EF = \frac{OA}{2}$



H.12

OA là bán kính của đường tròn tâm O cho nên OA có độ dài không đổi, do đó EF cũng có độ dài không đổi.

Điểm E có tính chất: cách đường thẳng AQ cho trước một đoạn không đổi, nên quỹ tích của E là đường thẳng Ez

song song với AQ cách AQ một đoạn không đổi $EF = \frac{OA}{2}$.

c) Vì tam giác QAB cân nên suy ra QO là một đường cao của nó, đường cao BK cắt QO tại H thì H phải là trực tâm của ΔQAB, do đó có $AH \perp QB$.

$AH \perp QB$, $OB \perp QB \Rightarrow AH // OB$

$BK \perp QA$, $OA \perp QA \Rightarrow OA // HB$.

Tứ giác OBHA có hai cặp cạnh đối song song, nó là hình bình hành (theo định nghĩa).

Hình bình hành OBHA có OB = OA (bán kính đường tròn tâm O) nên nó là hình thoi (theo nhận biết).

Vì OBHA là hình thoi nên AH = OA. Vì OA có độ dài không đổi nên AH cũng có độ dài không đổi.

Điểm H có tính chất: Cách A cố định (A đã cho) một đoạn không đổi bằng OA, suy ra: khi Q chuyển động trên AQ thì quỹ tích của H là đường tròn tâm A bán kính OA (theo quỹ tích đường tròn).

Bài 4. Phân tích thành nhân tử:

$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$

$= [ab(a + b) + abc] + [bc(b + c) + abc] + ca(c + a)$

$= ab(a + b + c) + bc(a + b + c) + ca(c + a)$

$= (a + b + c)(ab + bc) + ac(c + a)$

$= b(a + b + c(a + c) + ac(c + a)$

$= (a + c)(ab + b^2 + bc + ac)$

$= (a + c)[b(a + b) + c(a + b)]$

$= (a + c)(a + b)(b + c)$.

$= (a + c)[b(a + b) + c(a + b)]$

$= (a + c)(a + b)(b + c)$.

Đề 9

Bài 1. Cho biểu thức

$$M = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{2a + 2\sqrt{ab} + 2b}.$$

a) Rút gọn M;

b) Tìm những giá trị nguyên của a để M có giá trị nguyên

Bài 2. Tỉ lệ đồng trong loại quặng thứ nhất nhỏ hơn tỉ lệ đồng trong loại quặng thứ hai là 15%. Trộn hai loại quặng ấy được một hỗn hợp có 50% đồng, khối lượng loại quặng thứ nhất trong hỗn hợp là 25kg, khối lượng loại quặng thứ hai trong hỗn hợp bằng nửa khối lượng quặng thứ nhất. Tính tỉ lệ phần trăm đồng trong từng loại quặng.

Bài 3. Cho ba tia Om, On, Ot không cùng thuộc một mặt phẳng sao cho $\widehat{mOn} = 90^o$, $\widehat{nOt} = 60^o$, $\widehat{mOt} = 120^o$. Lấy các điểm E, F, I lần lượt trên Om, On, Ot sao cho OE = OF = OI =a.

a) Chứng minh tam giác EFI vuông.

b) Gọi K là trung điểm của EI, chứng minh OK vuông góc với mặt phẳng (EFI).

c) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp OEFI.

d) Gọi M, N là trung điểm của EF, FI. Tính thể tích của hình chóp của O.KMFI.

Bài 4. Tìm số dư cuối cùng của phép chia hai đa thức:

$(1 + x^{1992} + x^{1993} + x^{1994} + x^{1995}) : (1 - x^2)$.

Lời giải

*Bài 1.*a) Rút gọn biểu tức M

Điều kiện để M có nghĩa là : $a > 0$; $b > 0$; $a \neq b$; $a \neq 1$.

$$M = \frac{2}{a-1}.$$

b) Tìm những giá trị nguyên của a để M có giá trị nguyên; M có giá trị nguyên khi $a - 1$ là ước của 2. Các ước nguyên của 2 là ± 1 hoặc ± 2. Do đó:

$a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$

$a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$

$a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$

$a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1$

Theo điều kiện thì $a > 0$ nên $a = 0$; $a = -1$ bị loại.

Vậy các giá trị của $a = 2$; $a = 3$ thì M có giá trị nguyên là 2; 1.

*Bài 2.*Gọi tỉ lệ phần trăm đồng có trong loại quặng thứ nhất là x% ($x > 0$) thì tỉ lệ đồng có trong loại quặng thứ hai là $(x + 15)$%.

Khối lượng loại quặng thứ nhất trong hỗn hợp là 25 kg, biết khối lượng loại quặng thứ hai trong hỗn hợp bằng nửa khối lượng của loại quặng thứ nhất nên khối lượng của loại quặng thứ hai là 12,5 kg. Vậy khối lượng hỗn hợp của hai loại quặng khi đem trộn là 37,5 kg.

Theo đề bài có phương trình:

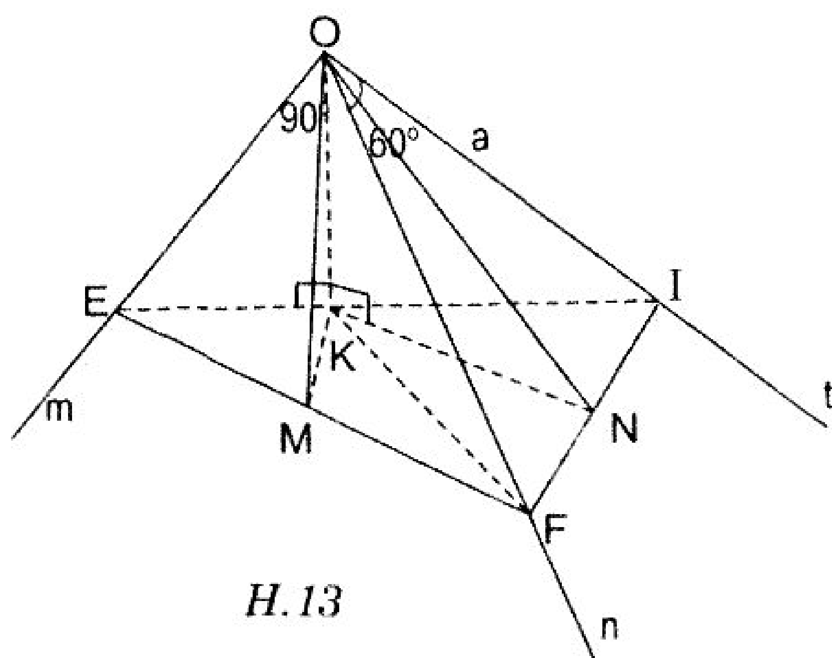
$25x + 12,5(x + 15) = 37,5 . 50$

$25x + 12,5x + 187,5 = 1875.$

Giải phương trình được x = 45. Sau khi thử lại, có kết quả: Tỉ lệ phần trăm đồng trong loại quặng thứ nhất, thứ hai là 45%; 60%.

Bài 3. Hình 13

a) Vì OI = OF = a và $\widehat{IOF} = 60^\circ$ nên ΔOIF đều, suy ra IF = a. Vì OE = OF và $\widehat{EOF} = 90^\circ$ nên ΔOEF là tam giác vuông cân, suy ra $EF = a\sqrt{2}$.



H.13

Gọi K là trung điểm của EI thì OK ⊥ EI (vì ΔOEI cân), KE = KI và $\widehat{EOK} = \widehat{KOI} = \dfrac{\widehat{EOI}}{2} = 60^\circ$. Như vậy tam giác vuông OKE là nửa tam giác đều cạnh bằng a, do đó

$KE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra $EI = a\sqrt{3}$.

Ta có $EF^2 + FI^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$, và $EI^2 = 3a^2$ nên theo

định lí đảo của Pitago thì ΔEFI vuông tại F.

b) Tam giác vuông EFI có FK là trung tuyến thuộc cạnh huyền EI nên KF = EK. $\Delta OKE = \Delta OKF$ (vì có OK chung, KE = KF, OE = OF = a) nên $\widehat{OKE} = \widehat{OKF}$ = 1v hay $OK \perp KF$.

Ta có $OK \perp EI$, $OK \perp KF \Rightarrow OK \perp (EFI)$.

c) Hình chóp OEFI có đường cao là OK và đáy là tam giác vuông EFI, do đó thể tích là:

$$V = \frac{1}{3}S_{EFI} \cdot OK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}EF.FI.OK.$$

Vì Δ OKE là tam giác đều nên nên $OK = \frac{OE}{2} = \frac{a}{2}$, nên

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2} \text{ (đơn vị thể tích).}$$

Diện tích toàn phần S của hình chóp OEFI là :

$$S = S_{EFI} + S_{OEF} + S_{OFI} + S_{OEI}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}$$

$$= \frac{a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ (đơn vị diện tích).}$$

d) Vì K, M, N lần lượt là trung điểm của EI, EF, FI và ΔEFI vuông tại F nên suy ra KMFN là hình chữ nhật có $MF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $FN = \frac{a}{2}$.

Thể tích V của hình chóp OKMFN là:

$$V = \frac{1}{3}S_{KMFN} \cdot OK = \frac{1}{3} \cdot MF.FN.OK$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$ (đơn vị thể tích).

Bài 4. Đa thức chia có bậc cao nhất là 2, nên số dư cuối cùng chỉ có thể có số hạng bậc cao nhất là 1, do đó số dư có dạng $ax + b$.

Gọi thương của hai đa thức đã cho là $Q(x)$, nên có đẳng thức:

$$(1 + x^{1992} + x^{1993} + x^{1994} + x^{1995}) = (1 - x^2).Q(x) + ax + b.$$

Cho $x = 1$, có $5 = 0 + a + b$.

Cho $x = -1$, có $1 = 0 - a + b$.

Giải hệ phương trình, $\begin{cases} a + b = 5 \\ -a + b = 1 \end{cases}$, được $a = 2$, $b = 3$

Vậy số dư cuối cùng phải tìm là $2x + 3$.

Đề 10

Bài 1. Cho biểu thức

$$Q = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)$$

a) Rút gọn Q;

b) Tìm giá trị của x để biểu thức Q rút gọn bằng 6.

Bài 2. Một phòng họp có 360 ghế ngồi được xếp thành từng hàng và mỗi hàng có số ghế ngồi bằng nhau. Nhưng do số người đến họp là 400 người nên đã phải kê thêm 1

hàng và mỗi hàng cũng phải kê thêm 1 ghế ngồi nữa mới đủ chỗ. Tính xem lúc đầu ở trong phòng họp có bao nhiêu hàng ghế và mỗi hàng có bao nhiêu ghế ngồi?

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, tia phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại E và cắt đường tròn tại M.

a) Chứng minh OM vuông góc với BC;

b) Dựng tia phân giác ngoài Ax của góc A, cắt đường tròn tại N, chứng minh ba điểm M,O,N thẳng hàng;

c) Kéo dài Ax cắt CB kéo dài tại F, chứng minh rằng FB.EC = FC.EB;

d) Gọi giao điểm của OM và BC là I, chứng minh rằng $\widehat{AMI} = \widehat{CFA}$ và $\widehat{AIO} = \widehat{MFA}$.

Bài 4. Cho $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Chứng minh rằng S không phải là số tự nhiên.

Lời giải

Bài 1. a) Rút gọn Q

Điều kiện để Q có nghĩa là : $x > 0$; $x \neq 1$.

$$Q = \frac{2\left(x + \sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x}}$$

Ta có: $\frac{2\left(x + \sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x}} = 6$ (với $x > 0$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x} + 2 = 6\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x} + 2 - 6\sqrt{x} = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 4\sqrt{x} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy với x = 1 (thoả mãn x > 0) thì Q có giá trị bằng 6.

Bài 2. Gọi số hàng ghế có lúc đầu trong phòng họp là x (x là số tự nhiên khác 0) thì số ghế ngồi trên mỗi hàng có lúc đầu là: $\frac{360}{x}$ (ghế). Nếu kê thêm 1 hàng thì số ghế sẽ là (x + 1) hàng và đủ chỗ cho 400 người ngồi, như vậy số ghế ngồi trên mỗi hàng có lúc sau là: $\frac{400}{x+1}$ (ghế).

Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{400}{x+1} - \frac{360}{x} = 1 \Leftrightarrow 400x - 360x - 360 = x^2 + x$$

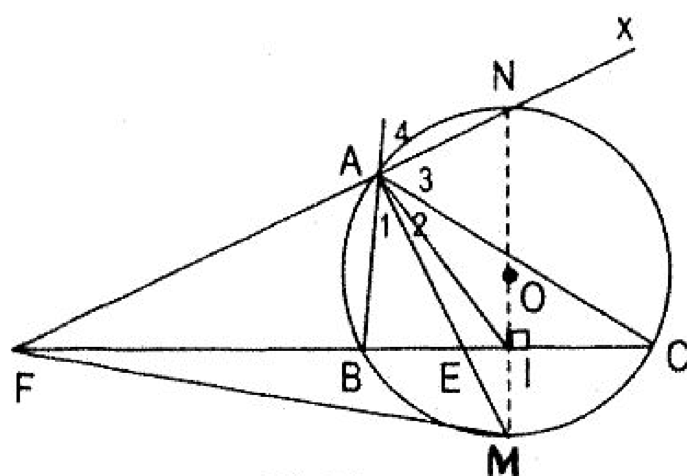
$$\Leftrightarrow x^2 - 39x + 360 = 0.$$

Giải phương trình được $x_1 = 24$; $x_2 = 15$. Sau khi thử lại, có kết quả : Số hàng ghế và số ghế trên mỗi hàng có lúc đầu là 24 và 15 hoặc 15 và 24.

Bài 3. Hình 14

a) AM là tia phân giác trong của góc A tức là $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, suy ra $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC}$ hay M là trung điểm của cung nhỏ BC.

Vậy OM ⊥ BC (theo tính chất đối xứng của đường tròn).



H.14

b) Vì AM, AN là phân giác trong và ngoài của $\widehat{BAC}$ và

$\widehat{CAy}$, mà $\widehat{BAC} + \widehat{CAy} = 180^0$ nên $Ax \perp AM$ suy ra $\widehat{NAM} =$ 1v. Góc NAM là góc nội tiếp đường tròn (O) bằng 1v nên NM phải là đường kính, vậy N, O, M thẳng hàng.

c) Theo tính chất của đường phân giác của tam giác, ta có :

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} \text{ và } \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}, \text{suy ra } \frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FC} \Rightarrow FB.EC = FC.EB$$

d) Vì $\widehat{MAN} = 1v$ (Chứng minh câu a) nên $\widehat{MAF} = 1v$, vì $OM \perp BC$ (chứng minh câu b) nên $\widehat{MIF} = 1v$.

Các điểm A, I cùng nhìn FM dưới một góc vuông nên A, I phải nằm trên đường tròn đường kính FM (theo quỹ tích cung chứa góc), suy ra tứ giác MIAF nội tiếp được đường tròn.

Vậy: $\widehat{AMI} = \widehat{CFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AI}$ của đường tròn đường kính FM) và $\widehat{AIO} = \widehat{MFA}$ (vì cùng bù với $\widehat{AIM}$)).

Bài 4. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức kép sau: $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$ (với n là số tự nhiên khác 0).

Thật vậy:

- $$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- $$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} = \frac{2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Do đó:

• $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}} > 1 +$

$$+2\left[\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + ... + \left(\sqrt{101} - \sqrt{100}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\left(\sqrt{101} - \sqrt{2}\right) > 1 + 2.10 - 2\sqrt{2} > 21 - 3 = 18.$$

• $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}} < 1 +$

$$2\left[\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + ... + \left(\sqrt{100} - \sqrt{99}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\left(\sqrt{100} - 1\right) = 1 + 2.9 = 19.$$

Vậy $18 < S < 19$, chứng tỏ S không phải là số tự nhiên.

Đề 11

Bài 1. Giải phương trình:

a) $(x^2 + x - 1)(x + 1)x = 56$

b) $\sqrt{x - 1 + 4\sqrt{x-5}} + \sqrt{11 + x + 8\sqrt{x-5}} = 4.$

Bài 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước đã làm đầy bể trong 50 giờ 50 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ hai chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ nhất là 4 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi phải chảy trong bao lâu bể sẽ đầy nước ?

Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường tròn

tâm O' bán kính R' (với R' < R) tiếp xúc trong tại A. Đường nối tâm cắt đường tròn O' và O tại B và C. Qua trung điểm P của BC dựng dây MN vuông góc với BC. Nối A với M cắt đường tròn O' tại E.

a) So sánh góc AMO với góc NMC.

b) Chứng minh N, B, E thẳng hàng; O'P = R; OP = R'.

c) Xét vị trí của PE với đường tròn tâm O'

d) Khi cho AB = 6cm, BC = 4cm và cho tam giác AMC quay trọn một vòng quanh AC, hãy tính thể tích của hình được tạo ra.

Bài 4. Tìm các số nguyên nghiệm đúng phương trình sau: $(x^2 + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2y$

Lời giải

Bài 1. Giải phương trình:

a) Đặt $x^2 + x = y$, phương trình đã cho có dạng:

$$(y - 1)\,y = 56$$

$$y^2 - y - 56 = 0$$

$\Delta = 1 + 224 = 225 = 15^2$

$$y_1 = \frac{1+15}{2} = 8;\ y_2 = \frac{1-15}{2} = -7$$

$8 = y_1 = x^2 + x \Rightarrow x^2 + x - 8 = 0$

$\Delta = 1 + 32 = 33$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2};\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$$

$-7 = y_2 = x^2 + x \Rightarrow x^2 + x + 7 = 0$

$\Delta = 1 - 28 = -27 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

Trả lời: Nghiệm của phương trình;

$$x_1 = \frac{\sqrt{33} - 1}{2}.$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}.$$

b) Trước hết, biến đổi mỗi căn thức đã cho ở vế trái để có thể khai phương được:

$$\sqrt{x - 1 + 4\sqrt{x-5}} = \sqrt{(x-5) + 2.2\sqrt{x-5} + 4} =$$

$$= \sqrt{\left(2 + \sqrt{x-5}\right)^2} = 2 + \sqrt{x-5}$$

$$\sqrt{11 + x + 8\sqrt{x-5}} = \sqrt{x - 5 + 2.4.\sqrt{x-5} + 16} =$$

$$= \sqrt{\left(4 + \sqrt{x-5}\right)^2} = 4 + \sqrt{x-5}.$$

Phương trình đã cho có dạng:

$2 + \sqrt{x-5} + 4 + \sqrt{x-5} = 4$

$6 + 2\sqrt{x-5} = 4$

$2\sqrt{x-5} = -2$, vô lí.

Trả lời: Phương trình đã cho không có nghiệm.

Bài 2. Gọi thời gian mà vòi thứ nhất nhảy riêng làm đầy bể là x giờ ($x > 4$) thì thời gian vòi thứ hai chảy riêng làm đầy bể là ($x + 4$) giờ. Do đó trong một giờ vòi thứ nhất làm đầy $\frac{1}{x}$ bể và vòi thứ hai làm đầy $\frac{1}{x+4}$ bể.

Cả hai vòi cùng chảy làm đầy bể không có nước trong 5 giờ 50 phút hay $5\frac{5}{6}$ giờ $= \frac{35}{6}$ giờ, thì trong một giờ cả hai

vòi làm đầy $\frac{6}{35}$ bể.

Vậy có phương trình:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{6}{35} \Leftrightarrow 35x + 140 + 35x = 6x(x + 4) \Leftrightarrow$

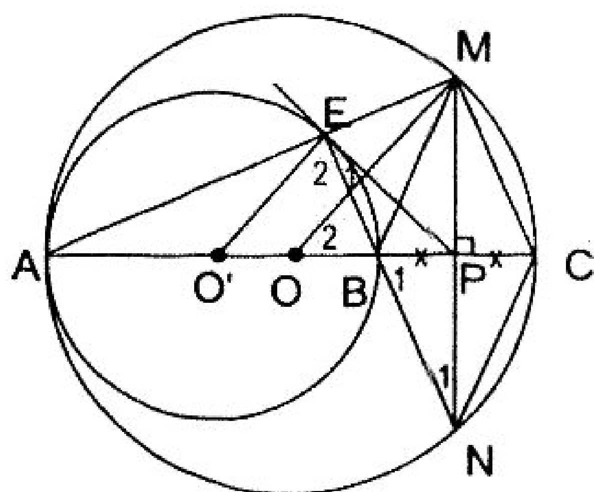
$70x + 140 = 6x^2 + 24x \Leftrightarrow$

$6x^2 - 46x - 140 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 23x - 70 = 0.$

Giải phương trình được $x_1 = 10$; $x_2 = -\frac{14}{6}$ (loại). Sau khi thử lại, có kết quả :

Vòi thứ nhất, thứ hai chảy đầy bể trong 10 giờ; 14 giờ.

Bài 3. Hình 15



H.15

a) Do AC là đường kính của đường tròn tâm O nên $\widehat{AMC}$ = 1v. Trong tam giác vuông AMC có MP ⊥ AC nên $\widehat{MAC} = \widehat{NMC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), nhưng $\widehat{MAC} = \widehat{AMO}$ (vì tam giác AOC cân) do đó: $\widehat{AMO} = \widehat{NMC}$.

b) Vì MN ⊥ BC nên PM = PN (theo tính chất đối xứng của đường tròn), lại có PB = PC và MN ⊥ BC nên MCNB là hình thoi, suy ra BN // MC.

$\widehat{AEB}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB) hay BE ⊥ AM, CM ⊥ AM (vì $\widehat{AMC}$ = 1v), suy ra BE // MC.

Từ điểm B ở ngoài MC chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với BC mà thôi, nên BE và BN phải cùng nằm trên một đường thẳng vậy N, B, E thẳng hàng.

$$O'P = O'B + BP = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB + BC}{2} = \frac{2R}{2} = R$$

$$OP = OC - PC = \frac{AC}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AC - BC}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{2R'}{2} = R'$$

c) Điểm P là trung điểm của cạnh huyền MN trong tam giác vuông MEN nên PE = PN hay ΔEPN cân suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{N_1}$ (1).

Trong tam giác vuông PNB thì $\widehat{N_1} + \widehat{B_1}$ = 1v, nhưng $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (góc đối đỉnh) nên $\widehat{N_1} + \widehat{B_2}$ = 1v (2). Tam giác O'EB có O'E = O'B nên là tam giác cân, suy ra $\widehat{B_2} = \widehat{E_2}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{O'EP}$ = 1v, do đó PE là tiếp tuyến của đường tròn tâm O'.

Chú ý: Có thể chứng minh ΔO'EP = ΔOPM để có $\widehat{O'EP}$ = 1v nên PE là tiếp tuyến của đường tròn tâm O'.

d) Khi quay trọn một vòng ΔAMC quanh AC thì thể tích của hình được tạo ra là tổng thể tích của hình nón có đường cao AP bán kính đáy là MP và thể hình nón có đường cao là CP bán kính đáy là MP. Do đó:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3}MP^2.AP + \frac{\pi}{3}MP^2.CP =$$

$$= \frac{1}{3}\pi MP^2(AP + CP) = \frac{1}{3}\pi MP^2.2R.$$

Cho AB = 6cm, BC = 4cm suy ra AP = 8cm, PC = 2 cm.

Trong tam giác vuông AMC (theo hệ thức lượng trong

tam giác vuông) có $MP^2 = PA.PC = 8.2 = 16$ (cm);

$2R = AC = AB + BC = 6 + 4 = 10$ (cm)

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.16.10 = \frac{160\pi}{3}$ (cm^3).

Bài 4. Tìm các số nguyên nghiệm đúng phương trình:

$(x^2 + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2y$

$\Leftrightarrow x^4 + x^2y^2 + x^2 + y^2 - 4x^2y = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + y^2 - 2x^2y + x^2y^2 + x^2 - 2x^2y = 0$

$\Leftrightarrow (4^4 - 2x^2y + y^2) + x^2(y^2 - 2y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - y)^2 + x^2(y - 1)^2 = 0$

Đẳng thức xảy ra khi $x^2 - y = 0$ và $x = 0$ hay $y = 1$, do đó:

- Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 0$
- Nếu $y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Vậy các số nguyên nghiệm đúng phương trình đã cho ta:

$(x = 0 ; y = 0)$ hay $(x = \pm 1 ; y = 1)$.

Đề 12

Bài 1. a) Tính $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}$;

b) Phân tích thành nhân tử:

$B = 4x^3 + 8x^2 + x - 3.$

Bài 2. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng chữ số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu đem số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy B làm tâm vẽ đường tròn bán kính OB. Đường tròn này cắt đường tròn O tại C và D.

a) Tứ giác ODBC là hình gì, tại sao?

b) Chứng minh $OC \perp AD$, $OD \perp AC$.

c) Chứng minh rằng trực tâm của tam giác CDB nằm trên đường tròn tâm B.

d) H là một điểm nằm trên cung COD. Hãy dựng một tam giác nội tiếp đường tròn tâm B nhận H làm trực tâm.

Bài 4. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, chứng minh rằng :

a) $\frac{2a + a}{2b + d} = \frac{a}{b}$;

b) a (2b + 3d) = b(2a + 3c).

Lời giải

Bài 1. a)

$$A = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}$$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{16 - 8\sqrt{2}) + 2}}}$$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2}}}$$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + 4 - \sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{4 + \sqrt{12} +}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1}}$$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}} = \sqrt{6 - 2\left(\sqrt{3} + 1\right)}$$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{3} - 2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{3} - 1.$$

b) $B = 4x^3 + 8x^2 + x - 3 = 4x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 4x - 3x - 3$

$= 4x^2(x + 1) + 4x(x + 1) - 3(x + 1)$

$= (x + 1)(4x^2 + 4x - 3)$

$= (x + 1)(4x^2 - 2x + 6x - 3)$

$= (x + 1)[2x (2x - 1) + 3(2x - 1)]$

$= (x + 1)(2x - 1)(2x + 3).$

Bài 2. Gọi chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là y (x, y là các số tự nhiên lớn hơn hay bằng 1 nhưng nhỏ hơn hoặc bằng 9), thì số phải tìm có dạng $\overline{xy} = 10x + y$.

Biết số phải tìm gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị, có phương trình (1): $10x + y = 7y$ (1).

Biết rằng, nếu lấy số phải tìm chia cho tổng các chữ số của nó $(x + y)$ thì được thương số là 4 và số dư là 3, nên có phương trình (2) :

$10x + y = 4(x + y) + 3$ (2)

Vậy có hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x + y = 7y & (1) \\ 10x + y = 4(x + y) + 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) có $10x = 6y \Rightarrow y = \frac{10}{6}x = \frac{5}{3}x$ (1')

Từ (2) có $6x - 3y = 3 \Rightarrow 2x - y = 1$ (2').

Thế (1') vào (2') có : $2x - \frac{5}{3}x = 1 \Rightarrow 6x - 5x = 3 \Rightarrow x = 3.$

$y = \frac{5}{3}x = \frac{5}{3}.3 = 5$

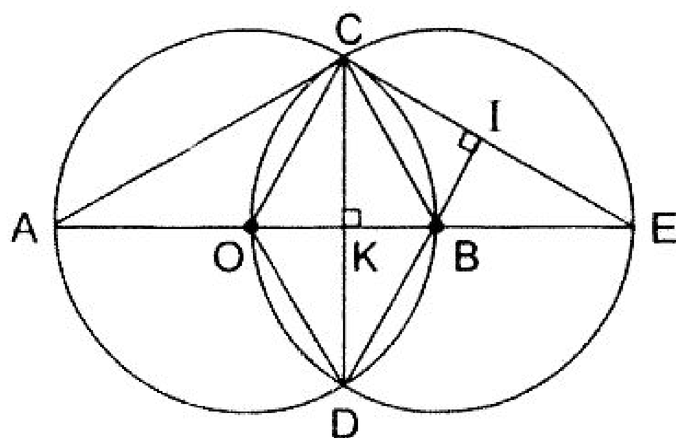
x = 3, y = 5 $\Rightarrow$ x, y là các số tự nhiên lớn hơn 1 nhỏ hơn 9 và số phải tìm là 35.

Thử lại: 35 = 7.5

35 = 4(3 + 5) + 3

Trả lời: Số phải tìm là 35.

Bài 3. Hình 16



H.16

a) Đường tròn tâm O và đường tròn tâm B là hai đường tròn có cùng bán kính nên OC = OD = BC = BD do đó ODBC là hình thoi (theo nhận biết).

b) Vì ODBC là hình thoi, nên OC // BD.

Vì $\widehat{ADB}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB) nên AD ⊥ DB.

OC // DB, AD ⊥ DB $\Rightarrow$ OC ⊥ AD (theo hệ quả đường song song). Chứng minh tương tự có OD ⊥ AC.

c) Đường tròn tâm O và đường tròn tâm B cắt nhau tại C và D nên OB ⊥ CD. Kéo dài OB cắt đường tròn tâm B tại E.

Chứng minh tương tự câu b) có CE ⊥ DB.

Tam giác CDB có hai đường cao BK và CI (K,I là giao điểm của OB và CD ; CE và BD) cắt tại E, đó chính là trực tâm của ΔCDB.

Vậy trực tâm của ΔCDB nằm trên đường tròn tâm B.

d) Hình 17

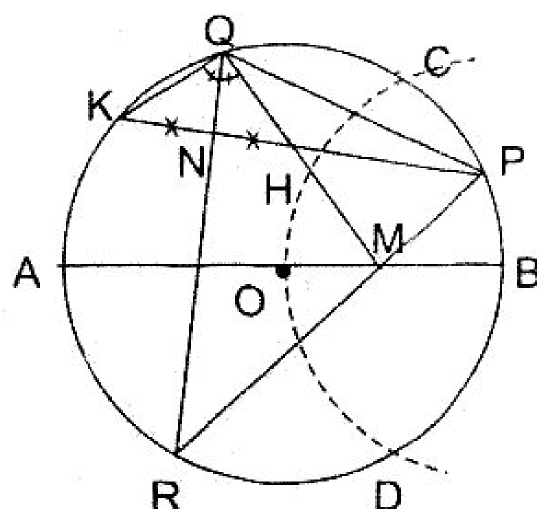
• *Phân tích*: Dựa theo kết quả trên

• *Cách dựng*:

- Lấy P bất kì trên đường tròn tâm O.

- Nối P với H (thuộc đường tròn tâm B) rồi kéo dài cắt đường trong tâm O tại K.

- Qua trung điểm N của KH dựng đường trung trực của đoạn KH, cắt đường tròn tại Q, R.



H.17

- Tam giác PQR là tam giác phải dựng.

• *Chứng minh* : $\widehat{QKP} = \widehat{QRP}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PQ}$), $\widehat{KQR} = \widehat{RQM}$ (vì ΔQKH cân có đường cao QN cũng là phân giác). Hai tam giác QNK và QMR có hai cặp góc bằng nhau tức là $\widehat{QNK} = \widehat{QMR}$ =1v hay $QM \perp RP$.

ΔPQR nội tiếp đường tròn tâm O nhận H làm trực tâm.

• *Biện luận*: Vì có vô số điểm P trên đường tròn tâm O và các phép dựng hình kể trên đều thực hiện được, nên bài toán có vô số nghiệm hình với mọi điểm H nằm trên cung COD của đường tròn tâm B.

Bài 4. Theo tính chất của tỉ lệ thức :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{2a+c}{2b+d} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Vậy $\dfrac{2a+c}{2b+d} = \dfrac{a}{b}$.

b) Tương tự:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{3c}{3d} \Rightarrow \frac{2a+3c}{2b+3d} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}.$$

Vậy $a(2b + 3d) = b(2a + 3c)$.

Đề 13

Bài 1. Cho biểu thức:

$$M = \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30}$$

a) Rút gọn M;

b) Tìm các giá trị của x để $M > 0$; $M < 0$.

Bài 2. Hai tổ sản xuất cùng nhận chung một mức khoán. Nếu làm chung trong 4 giờ thì hoàn thành được $\frac{2}{3}$ mức khoán.

Nếu để mỗi tổ làm riêng thì tổ này sẽ làm xong mức khoán trước tổ kia 5 giờ. Hỏi để làm xong mức khoán thì mỗi tổ phải làm trong bao nhiêu lâu?

Bài 3. Cho đường tròn tâm O và một đường thẳng d cắt đường tròn đó tại hai điểm cố định A và B. Từ một điểm M bất kì trên đường thẳng d nằm ngoài đoạn AB người ta kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn là MP và MQ (P,Q là các tiếp điểm).

a) Tính các góc của tam giác MPQ biết rằng góc giữa hai tiếp tuyến MP và MQ là 45°.

b) Gọi I là trung điểm AB. Chứng minh rằng 5 điểm M, P, Q, I cùng nằm trên một đường tròn.

c) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ khi M chạy trên d.

Bài 4. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \dfrac{x|x-2|}{x^2-5x+6}$;

b) $B = |x| + |x-1|$.

Lời giải

Bài 1. a) Rút gọn:

$$M = \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30}$$

$$= \frac{1}{x^2-2x-3x+6} + \frac{1}{x^2-3x-4x+12} +$$

$$+ \frac{1}{x^2-4x-5x+20} + \frac{1}{x^2-5x-6x+30}$$

$$= \frac{1}{(x^2-2x)-(3x-6)} + \frac{1}{(x^2-3x)-(4x-12)} +$$

$$+ \frac{1}{(x^2-4x)-(5x-20)} + \frac{1}{(x^2-5x)-(6x-30)}$$

$$= \frac{1}{x(x-2)-3(x-2)} + \frac{1}{x(x-3)-4(x-3)} +$$

$$+ \frac{1}{x(x-4)-5(x-4)} + \frac{1}{x(x-5)-6(x-5)}$$

$$= \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)}$$

M có nghĩa khi $x \neq 2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$; $x \neq 5$; $x \neq 6$.

$$M = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-5}$$

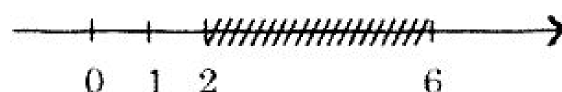
$$= \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-2} = \frac{x-2-x+6}{(x-6)(x-2)} = \frac{4}{(x-6)(x-2)}.$$

b) Tìm giá trị của x để:

• $M > 0$ khi : $x - 6$ và $x - 2$ cùng dương tức là $x > 6$

$x - 6$ và $x - 2$ cùng âm tức là $x < 2$.

Vậy $M > 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x > 6$



• $M < 0$ khi các thừa số $x - 6$ và $x - 2$ có dấu ngược nhau.

Vậy $M < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 6$



Bài 2. Gọi thời gian để tổ thứ nhất, tổ thứ hai làm một mình xong mức khoán là x giờ, y giờ ($x > y > 0$) thì trong một giờ tổ thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ mức khoán, tổ thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ mức khoán. Trong 4 giờ làm chung, cả hai tổ làm được $4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ mức khoán, do đó có phương trình (1):

$4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{2}{3}$ hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ (1)

Nếu làm riêng thì tổ thứ nhất làm nhiều hơn tổ thứ hai là 5 giờ nên có phương trình (2): $x - y = 5$ (2)

Do đó có hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} & (1) \\ x - y = 5 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) có $x = y + 5$ (3). Thay (3) vào (1) có:

$\dfrac{1}{y+5} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow 6y + 6(y + 5) = y(y + 5) \Leftrightarrow$

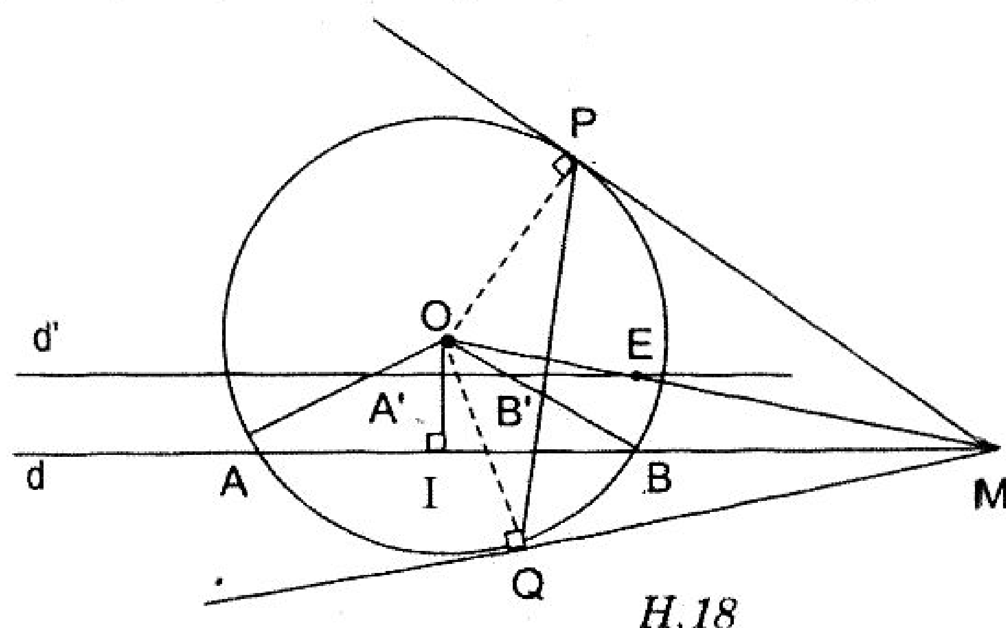
$\Leftrightarrow 6y + 6y + 30 = y^2 + 5y \Leftrightarrow y^2 - 7y - 30 = 0.$

Giải phương trình được $y_1 = 10$; $y_2 = -3$ (loại). Sau khi thử lại, có kết quả:

Đội thứ nhất, thứ hai làm một mình xong mức khoán 15 giờ ;10 giờ.

Bài 3. Hình 18

a) MP, MQ là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O



H.18

cùng xuất phát từ M nên MP = MQ hay ΔMPQ cân suy ra $\widehat{MPQ} = \widehat{MQP}$.

Biết $\widehat{PMQ} = 45^\circ$ nên $\widehat{MPQ} = \widehat{MQP} = \dfrac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67^\circ 30'$.

b) Do I là trung điểm của AB nên OI ⊥ AB hay $\widehat{OIM} =$ 1v; MP, MQ là các tiếp tuyến của đường tròn tâm O nên $\widehat{OPM} = \widehat{OQM} =$ 1v. Các điểm P,I, Q cùng nhìn đoạn OM dưới một góc vuông nên P, I, Q phải nằm trên đường tròn đường kính OM (theo quỹ tích cung chứa góc). Vậy năm điểm M, P, O, I, Q cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

c) • *Phần thuận.* Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ chính là tâm E (trung điểm OM) của đường tròn đi qua 5 điểm M, P, O, I, Q, suy ra EO = EI (cùng là bán kính), mà O và I là 2 điểm cố định nên E phải nằm trên đường trung trực d' của đoạn OI.

Gọi giao điểm của d' với bán kính OA, OB của đường tròn tâm O là A', B'. Vì M nằm ngoài đoạn AB nên E cũng phải nằm ngoài đoạn A'B'.

• *Phần đảo.* Lấy E' bất kì trên d' (nằm ngoài đoạn A'B'), nối O với E' cắt d' tại M'. Kẻ hai tiếp tuyến M'P', M'Q' với đường tròn tâm O.

Ta có E'M' = E'O (tính chất đường trung bình trong tam giác) E'M' = E'O = E'P' = E' Q (vì E'P', E' Q là các đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của các tam giác vuông P'M'O và Q'M'O). Do đó E' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác M'P'Q'.

• *Kết luận.* Quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam

giác MPQ là đường thẳng d' trung trực của đoạn OI cố định trừ đoạn A'B'.

*Bài 4.*a) Dựa vào định nghĩa về giá trị tuyệt đối và điều kiện có nghĩa của A ($x \neq 2$) nên:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 \\ -x+2 \end{cases}$$

Do đó:

$$A = \frac{x|x-2|}{(x-2)(x-3)} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-3} & \text{nếu } x > 2 \\ -\dfrac{x}{x-3} & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

b) Ta có $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Lần lượt rút gọn B trong 3 khoảng :

$x < 0$; $0 \leq x < 1$; $x \geq 1$.

• Nếu $x < 0$ thì $|x| = -x$; $|x - 1| = -x + 1$ (vì $x - 1$ là số âm).

Vậy $B = |x| + |x - 1| = -x - x + 1 = -2x + 1$.

• Nếu $0 \leq x < 1$ thì $|x| = x$; $|x - 1| = -x + 1$ (vì $x - 1$ là số âm).

Vậy $B = |x| + |x - 1| = x - x + 1 = 1$.

• Nếu $x \geq 1$ thì $|x| = x$; $|x - 1| = x - 1$ (vì $x - 1$ là số không âm).

Vậy $B = |x| + |x-1| = x + x - 1 = 2x - 1$.

Đề 14

Bài 1. Cho biểu thức

$$M = \left(\frac{x - 5\sqrt{x}}{x - 25} - 1\right) : \left(\frac{25 - x}{x + 2\sqrt{x} - 15} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 3}\right)$$

a) Rút gọn M;

b) Với giá trị nào của x thì $M < 1$.

Bài 2. Một xí nghiệp đóng giầy dự đinh hoàn thành kế hoạch trong 26 ngày. Nhưng nhờ biết cải tiến kĩ thuật theo quy trình công nghệ mới nên mỗi ngày đã làm vượt mức 6000 đôi giầy do đó chẳng những đã hoàn thành kế hoạch đã dự trong 24 ngày mà còn vượt mức 104 000 đôi giầy. Tính số đôi giầy phải làm theo kế hoạch.

Bài 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BK gặp nhau tại H, BK kéo dài cắt đường tròn tại F. Vẽ đường kính BOE.

a) Tứ giác AFEC là hình gì, tại sao?

b) Gọi I là trung điểm của AC, chứng minh H, I, E thẳng hàng.

c) Chứng minh $OI = \frac{1}{2}BH$; H và F đối xứng qua AC.

d) Khi tam giác ABC vuông tại B thì các kết quả trên thay đổi thế nào?

Bài 4. Cho biểu thức.

$$P = \left(\frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 3}\right)^2 \frac{(x - 3)^2 + 12x}{4}$$

Chứng minh rằng, với x khác -1; -2; -3 thì P không phụ thuộc x.

Lời giải

*Bài 1.*a) Rút gọn biểu thức M.

Điều kiện để M có nghĩa là $x \geq 0$; $x \neq 9$; $x \neq 25$.

$$M = \frac{5}{\sqrt{x}+3}.$$

b) Tìm giá trị của x để M < 1

$$M = \frac{5}{\sqrt{x}+3} < 1. \qquad (1)$$

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+3 > 0$, nên

(1) $\Leftrightarrow 5 < \sqrt{x}+3 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{x} \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy M < 1 với x > 4 trừ x = 9 và x = 25

*Bài 2.*Gọi số đôi giầy mà xí nghiệp dự định phải làm là x (x : nguyên, dương) thì mỗi ngày dự định làm là $\frac{x}{26}$ đôi giầy.

Nhưng đã làm vượt mức 104000 đôi giầy nên số đôi giầy đã làm được là (x + 104000) đôi giầy và đã hoàn thành kế hoạch trong 24 ngày do đó mỗi ngày đã làm được $\frac{x+104000}{24}$ đôi giầy.

Do vượt mức 6000 đôi mỗi ngày nên có phương trình :

$$\frac{x+104000}{24} - \frac{x}{26} = 6000.$$

Giải phương trình được x = 520 000. Sau khi thử lại, có

kết quả : số đôi giầy xí nghiệp phải làm theo kế hoạch là 520 000 đôi.

Bài 3. Hình 19.

a) $\widehat{BFE} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường trong đường kính BE) $EF \perp BK$, $AC \perp BK$ (gt) nên $EF \,//\, AC \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CF}$ do đó $\widehat{ACE} = \widehat{CAF}$.

Tứ giác AFEC có $EF \,//\, AC$ và $\widehat{ACE} = \widehat{CAF}$, nó là hình thang cân.

H.19

b) $\widehat{BCE} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BE) nên $EC \perp BC$, $AD \perp BC$ (gt) $\Rightarrow EC \,//\, AH$.

$\widehat{BAE} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BE) nên $EA \perp AB$. Vì H là giao điểm của hai đường cao BK và AD trong ΔABC nên $CH \perp AB$. Do đó $EA \,//\, CH$.

Tứ giác AHCE có $EC \,//\, AH$ và $EA \,//\, CH$, nó là hình bình hành (theo định nghĩa).

Trong hình bình hành AHCE có I là trung điểm của đường chéo AC thì đường chéo thứ hai HE phải đi qua I, vậy H, I, E thẳng hàng.

c) • Vì I là trung điểm của dây AC nên $OI \perp AC$, $BK \perp AC$ (theo giả thiết) nên $OI \,//\, BH$.

Trong ΔBHE có $OI \,//\, BH$ và $OB = OE$ (bán kính đường

tròn) suy ra $OI = \frac{1}{2}BH$ (theo tính chất đường trung bình trong tam giác).

• Do AHCE là hình bình hành nên AH = EC và AF = EC (vì $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{EC}$) nên AH = AF hay ΔAHF cân đỉnh A.

Trong tam giác cân AHF có AK là đường cao, AK cũng là trung trực nên KH = KF.

HF ⊥ AC và KH = KF nên H và F đối xứng qua AC.

d) Hình 20. Khi ΔABC vuông tại B thì AC là đường kính nên :

• Tứ giác AEFC vẫn là hình thang.

• I ≡ O, H ≡ B nên H, I, E vẫn thẳng hàng.

A
E
O ≡ I
D
F
B ≡ H
C

H.20

• H và F vẫn đối xứng qua BC.

• Các đoạn OI, BH suy biến thành một điểm tức có độ dài bằng 0 nên $OI = \frac{1}{2}BH$ (vì $0 = \frac{1}{2} \cdot 0$).

Bài 4. Trước hết hãy phân tích các mẫu thức thành nhân tử, ta có:

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$,

$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$,

$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$, và nhận thấy:

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{2x}{(x+3)(x+2)}=\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x+1},$$

do đó:

$$P=\left(\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}\right)^2\cdot\frac{(x-3)^2+12x}{4}$$

$$=\left[\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{2x}{(x+3)(x+1)}\right]^2\cdot\frac{x^2-6x+9+12x}{4}$$

$$=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right)^2\cdot\frac{x^2+6x+9}{4}$$

$$=\left(\frac{2}{x+3}\right)^2\cdot\frac{(x+3)^2}{4}=\frac{4}{(x+3)^2}\cdot\frac{(x+3)^2}{4}=1$$

Vậy với $x \neq -1$; $x \neq -2$; $x \neq -3$ thì $P = 1$, chứng tỏ rằng P không phụ thuộc vào giá trị của x.

Đề 15

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $m^3 + 5m^2 + 3m - 9$;

b) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$.

Bài 2. Tìm số tự nhiên có hai chữ số , biết rằng nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4

và dư là 3; còn nếu đem số đó chia cho tích các chữ số của nó thì được thương là 3 và dư 5.

Bài 3. Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng a, $\widehat{A} = 60^0$ và một đường tròn $\mathscr{C}$ nội tiếp ABCD.

a) Xác định tâm đường tròn $\mathscr{C}$.

b) Tính diện tích phần không chung nhau giữa hình thoi và hình tròn nội tiếp ABCD.

Bài 4. Hãy chỉ ra những số nguyên dương x, y nghiệm đúng phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1975}$

Lời giải

Bài 1. Phân tích thành nhân tử:

a) $m^3 + 5m^2 + 3m - 9 = m^3 + 6m^2 + 9m - m^2 - 6m - 9 =$

$= (m^3 + 6m^2 + 9m) - (m^2 + 6m + 9) = m(m^2 + 6m + 9) -$

$- (m^2 + 6m + 9) = (m^2 + 6m + 9)(m - 1) = (m+3)^2(m - 1)$.

b) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2zyz$

$= (x^2y + xy^2) + (xz^2 + yz^2) + (x^2z + 2xyz + y^2z)$

$= xy(x + y) + z^2(x + y) + z(x^2 + 2xy + y^2)$

$= xy(x + y) + z^2(x + y) + z(x + y)^2$

$= (x + y)(xy + z^2 + xz + yz)$

$= (x + y)[(xy + xz) + (z^2 + yz)]$

$= (x + y)[x(y + z) + z(z + y)]$

$= (x + y)(y + z)(z + x)$.

Bài 2. Gọi chữ số hàng đơn vị, hàng chục của số tự nhiên phải tìm lần lượt là y, x (x, y là số tự nhiên từ 1 đến 9) thì số phải tìm có dạng $\overline{xy} = 10x + y$.

Nếu lấy số phải tìm chia cho tổng các chữ số của nó được thương là 4 và dư là 3, thì có phương trình (1):

$$10x + y = 4(x + y) + 3 \qquad (1).$$

Nếu lấy số phải tìm chia cho các tích các chữ số của nó được thương là 3 và dư là 5, thì có phương trình (2):

$$10x + y = 3xy + 5 \qquad (2)$$

Vậy có hệ số phương trình :

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x + y) + 3 & (1) \\ 10x + y = 3xy + 5 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) có $10x + y = 4x + 4y + 3 \Leftrightarrow 6x - 3y = 3$

$\Leftrightarrow 2x - y = 1$ suy ra $y = 2x - 1$ (3).

Thay (3) vào (2), có :

$10x + 2x - 1 = 3x(2x - 1) + 5 \Leftrightarrow 12x - 1 = 6x^2 - 3x + 5$

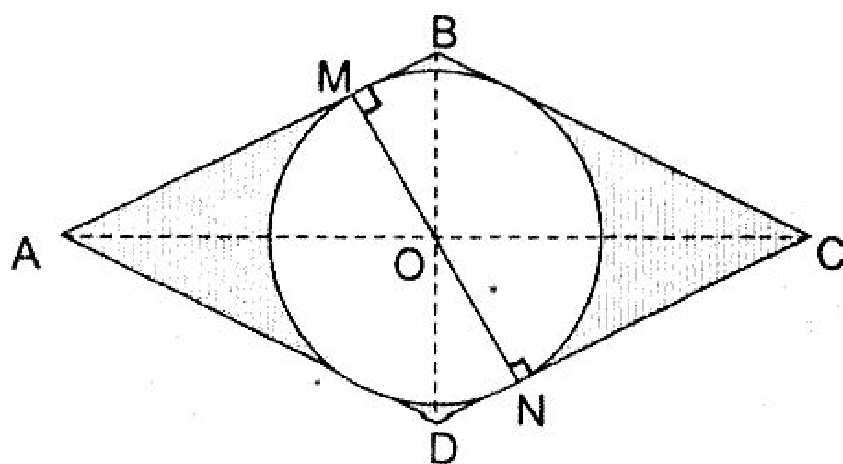
$\Leftrightarrow 6x^2 - 15x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0.$

Giải phương trình được $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2}$ (loại). Sau khi thử lại, có kết quả:

Số phải tìm là 23.

Bài 3. Hình 21.

a) Gọi O là tâm đường tròn $\mathscr{C}$ nội tiếp hình thoi ABCD thì O phải cách đều các cạnh hình thoi, nên O phải nằm trên các đường phân giác



H.21

của các góc A, B,C, D tức là O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình thoi ABCD.

b) Từ O hạ OM ⊥ AB thì M chính là tiếp điểm của đường tròn tâm O với cạnh AB, do đó OM là bán kính của hình tròn nội tiếp ABCD.

Gọi S là diện tích phần không chung nhau giữa hình thoi và hình tròn nội tiếp hình thoi (phần gạch sọc trên hình vẽ). Ta có:

$$S = S_{ABCD} - S_{\text{hình tròn tâm O}}$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{Hình tròn tâm O}} = \pi OM^2.$$

Kéo dài MO cắt DC tại N thì ON ⊥ DC và $OM = \frac{MN}{2}$

$$S_{ABCD} = MN\,.\,AB = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MN = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} : a = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

do đó $OM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, nên:

$$S_{\text{Hình tròn tâm O}} = \pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{16}.$$

Vậy $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi a^2}{16} = \frac{a^2}{16}(8\sqrt{3} - 3\pi).$

Bài 4. Ta có thể biến đổi như sau:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1975} = \sqrt{25.79} = 5\sqrt{79}.$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5\sqrt{79} = 4\sqrt{79} + \sqrt{79} = 3\sqrt{79} + 2\sqrt{79}$$
$$= \sqrt{1264} + \sqrt{79} = \sqrt{711} + \sqrt{316}.$$

Do đó : x = 1264, y = 79; x = 17, y = 1264

x = 711, y = 316; x = 316, y = 711.

Đề 16

Bài 1. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{3-4a}{1+a^2}=\frac{(2-a)^2}{1+a^2}-1.$$

a) Từ kết quả trên suy ra với giá trị nào của a thì biểu thức $P=\frac{3-4a}{1+a^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất? Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 2. Hai vật A và B chuyển động đều trên hai cạnh góc vuông hướng về đỉnh góc vuông. Khi chưa chuyển động, vật A và B cách đỉnh góc vuông lần lượt là 60m và 80m.

Khi cho hai vật chuyển động cùng một lúc, sau 3 giây thì khoảng cách giữa hai vật là 70m; sau hai giây tiếp theo thì khoảng cách giữa hai vật giảm đi 20cm. Tính vận tốc của hai vật theo m/s.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Lấy đường cao AH của ΔABC là đường kính của hình tròn (O_1). Gọi (O_2) là hình tròn nội tiếp ΔABC. Tính diện tích của hình được tạo thành bởi phần chung của tam giác ABC với hình tròn (O_1) nhưng không thuộc (O_2).

Lời giải

Bài 1. a) Biến đổi vế phải của đẳng thức:

$$\frac{(2-a)^2}{1+a^2}-1=\frac{4-4a+a^2}{1+a^2}-1=\frac{4-4a+a^2-1-a^2}{1+a^2}=\frac{3-4a}{1+a^2}$$

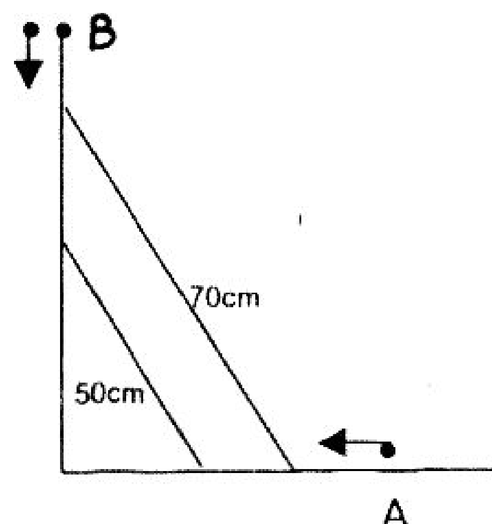
được vế trái, đẳng thức được chứng minh.

b) Ta có của a, nên $P = \frac{3-4a}{1+a^2} = \frac{(2-a)^2}{1+a^2} - 1$. Vì $\frac{(2-a)^2}{1+a^2} \geq 0$ với mọi giá trị của a, nên $P = \frac{(2-a)^2}{1+a^2} - 1 \geq -1$, dấu "=" chỉ xảy ra khi $(2 - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi a = 2.

Bài 2. Gọi vận tốc chuyển động đều của vật A, B lần lượt là xm/s, ym/s (x, y > 0). Sau 3 giây cùng chuyển động, vật A còn cách đỉnh góc vuông là (60 - 3x)m, vật B còn cách đỉnh góc vuông là (80 - 3y)m, do đó có phương trình (1):

$$(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2 \qquad (1)$$



Sau 2 giây tiếp theo, thì mỗi vật đã chuyển động được 5 giây và khoảng giữa chúng là 70 - 20 = 50 (m). Sau 5 giây cùng chuyển động, vật A còn cách đỉnh góc vuông là (60 - 5x)m, vật B còn cách đỉnh góc vuông là (80 - 5y)m, do đó có phương trình (2):

$$(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2 \qquad (2)$$

Vậy có hệ phương trình :

$$\begin{cases} (60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2 & (1) \\ (60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3600 - 360x + 9x^2 + 6400 - 480y + 9y^2 = 4900 & (1) \\ 3600 - 600x + 25x^2 + 6400 - 800y + 25y^2 = 2500 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 - 360x - 480y = 4900 - 3600 - 6400 & (1) \\ 25x^2 + 25y^2 - 600x - 800y = 2500 - 6400 - 3600 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 - 360x - 480y = -5100 & (1) \\ 25x^2 + 25y^2 - 600x - 800y = -7500 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 120x - 160y = -1700 & (1) \\ x^2 + y^2 - 24x - 32y = -300 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 120x - 160y = -1700 & (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 72x - 96y = -900 & (2) \end{cases}$$

$$-48x - 64y = -800$$

$$3x + 4y = 50$$

$$x = \frac{50 - 4y}{3} \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1) có:

$$\left(60 - 3\cdot\frac{50 - 4y}{3}\right)^2 + (80 - 3y)^2 = 4900$$

$$(10 + 4y)^2 + (80 - 3y)^2 = 4900$$

$$100 + 80y + 16y^2 + 6400 - 480y + 9y^2 = 4900$$

$$25y^2 - 400y + 1600 = 0$$

$$y^2 - 16y + 64 = 0$$

$$\Delta' = 8^2 - 64 = 0$$

$$y_1 = y_2 = \frac{-b'}{a} = 8.$$

$$x = \frac{50 - 4y}{3} = \frac{50 - 32}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$x = 6$; $y = 8 \Rightarrow x, y > 0$ thoả mãn điều kiện bài toán

Thử lại: $(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = (60 - 3.6)^2 + (80 - 3.8)^2$

$= 42^2 + 56^2 = 4900 = 70^2$

$(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = (60 - 5.6)^2 + (80 - 5.8)^2$

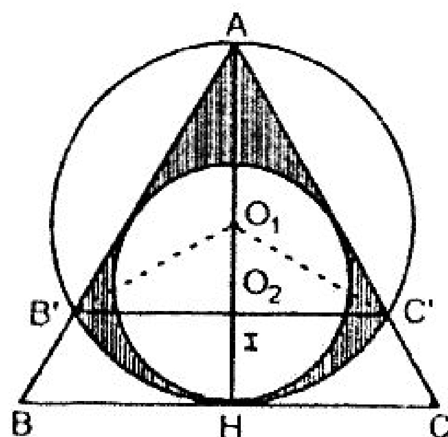
$= 30^2 + 40^2 = 2500 = 50^2$

Trả lời: Vận tốc của vật A là 6m/s, của vật B là 8m/s

Bài 3. Hình 22

Diện tích S cần tính là phần hình gạch sọc trên hình vẽ.

$S = S_{AB'HC'} - S_{(O_2)}$ (1).



H.22

(O_2) là hình tròn nội tiếp ΔABC đều cạnh a nên có bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $S_{(O_2)} = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$. (2)

$S_{AB'HC'} = S_{quatO_1B'HC'} + 2S_{ABO_1}$ (3)

$S_{quatO_1B'HC'} = \frac{1}{3}S_{(O_1)}$ (vì $\widehat{B'O_1C'} = 120^\circ = 2\widehat{A}$).

$$S_{(O_1)} = \pi\left(\frac{AH}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{16}.$$

Từ đó suy ra $S_{quatO_1B'HC'} = \frac{\pi a^2}{16}$ (4)

Biết rằng $S_{\Delta AB'O_1} = \frac{1}{2}.O_1A.\ B'I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.AH.B'I.$

Trong $\Delta BB'H$ vuông tại B', ta có:

$$B'H = BH\sin 60^\circ = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Trong $\Delta B'IH$ vuông tại I, ta có:

$$B'I = B'H\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{8}.$$

Vậy $S_{\Delta AB'O_1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3a}{8} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{64}$ (5)

Thay (4) và (5) vào (3) ta được:

$$S_{AB'HC'} = \frac{\pi a^2}{16} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{32} \qquad (6)$$

Thay (6) và (2) vào (1) được:

$$S = \frac{\pi a^2}{16} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{32} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2(9\sqrt{3} - 2\pi)}{96}.$$

Đề 17

Bài 1. Cho biểu thức:

$$B = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}\right)$$

a) Rút gọn B;

b) Tính $\sqrt{B}$ khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Bài 3. Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc.

Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và K là điểm chính giữa cung AB. Trên cung KB lấy một điểm M (khác K, B). Trên tia AM lấy điểm N sao cho AN = BM. Kẻ dây BP // KM. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AP, BM.

a) So sánh hai tam giác AKN, BKM;

b) Chứng minh tam giác KMN vuông cân;

c) Tứ giác ANKP là hình gì, tại sao?

d) Gọi R, S lần lượt là giao điểm thứ hai của QA, QB với đường tròn ngoại tiếp ΔOMP. Chứng minh rằng khi M di động trên cung KB thì trung điểm I của RS luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 4. Giải phương trình :

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{2+\sqrt{x}}{2x}.$$

Lời giải

Bài 1. a) Điều kiện để B có nghĩa là : $x \ge 0$; $x \ne 1$.

$$B=\frac{1}{x-1}$$

b) $B=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

Bài 2. Gọi thời gian mà người thứ nhất, thứ hai làm một mình xong công việc theo thứ tự là x giờ, y giờ ($x > 0$, $y > 0$), có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{36}\\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=\frac{3}{4}\end{cases}$$

Giải hệ được $x = 12$; $y = 18$

$x = 12$; $y = 18 \Rightarrow x > 0$; $y > 0$, thoả mãn điều kiện bài toán.

Thử lại: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{3+2}{36} = \frac{5}{36}$

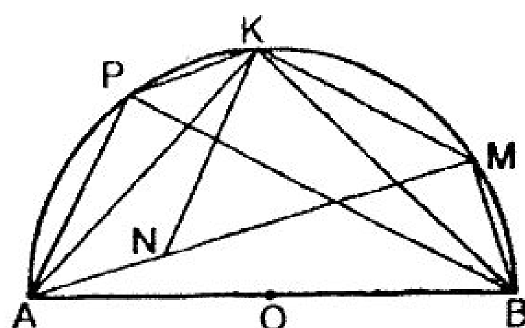
Trả lời: Thời gian người thứ nhất, thứ hai làm một mình xong công việc là 12 giờ, 18 giờ.

Bài 3. Hình 23

a) $\Delta AKN = \Delta BKM$ (c.g.c)

b) Dễ dàng chứng minh rằng $\widehat{NKM} = 90^\circ$, vì KN = KM suy ra ΔKMN vuông cân.

c) ANLP là hình bình hành

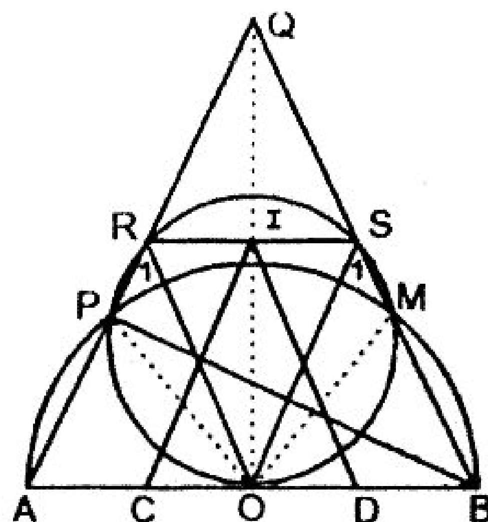


H.23

d) Hình 24

ΔBPQ vuông tại P có $\hat{B} = 45^\circ$ nên $\hat{Q} = 45^\circ$ (1)

ΔPOM vuông cân suy ra $\overset{\frown}{OP} = 90^\circ$ và $\overset{\frown}{OM} = 90^\circ$ do đó $\hat{R}_1 = \hat{S}_1 = 45^\circ$ (2) (góc nội tiếp của đường tròn ngoại tiếp ΔOMP).



H.24

Từ (1) và (2) suy ra SO // QR và RO // QS hay ORQS là hình bình hành. Vậy I là trung điểm của QO.

Gọi C và D lần lượt là trung điểm của OA, OB (tức là có C, D cố định) thì IC // QA và ID // QB suy ra $\widehat{CID} = \hat{Q} = 45^0$ (góc có cạnh tương ứng song song).

Vậy I nằm trên cung chứa góc 45^0 dựng trên CD.

Bài 4. Điều kiện $x > 0$. Đặt $y = \sqrt{x} > 0$, ta có :

$$\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y} = \frac{2+y}{2y^2}$$

$\Leftrightarrow 2y^2(1 + y) + 4y^2(1 + y^2) = (2 + y)(1 + y^2)(1 + y)$

$\Leftrightarrow (y - 1)(3y^3 + 2y^2 + 5y + 2) = 0 \quad (1).$

Vì $y > 0$ nên : $3y^3 + 2y^2 + 5y + 2 \neq 0$. Do đó có $y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 1$. Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Đề 18

Bài 1. Cho biểu thức

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} + \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} - 1\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} - \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1}\right)$$

a) Rút gọn M;

b) Tính giá trị của M khi $x = \frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

Bài 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và chảy đầy bể trong 4 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất có thể chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

Bài 3. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A và tiếp tuyến chung Ax. Một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1), (O_2) lần lượt tại các điểm B, C và cắt Ax tại điểm M. Kẻ các đường kính BO_1D, CO_2E.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của BC;

b) Chứng minh rằng tam giác O_1MO_2 vuông ;

c) Chứng minh rằng B, A, E thẳng hàng; C, A, D thẳng hàng ;

d) Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IO_1O_2 tiếp xúc với đường thẳng d.

Bài 4. Tìm m để hệ phương trình sau đây có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - (2m - 3)x + 6 = 0 \\ 2x^2 + x + (m - 5) = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Bài 1. a) Điều kiện $x \geq 0$; $x \neq \frac{1}{2}$; $M = -\sqrt{2x}$

b) $M = -\sqrt{3+2\sqrt{2}} = -\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = -\left(1+\sqrt{2}\right)$

Bài 2. Gọi thời gian để vòi một chảy đầy bể là x giờ (x >0) thì thời gian vòi hai chảy đầy bể là (x + 4) giờ, có phương trình:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{5}{24}$ hay $5x^2 - 28x - 96 = 0$

Giải phương trình được $x_1 = 8$; $x_2 = -\frac{12}{5}$ (loại). Sau khi thử lại, có kết quả;

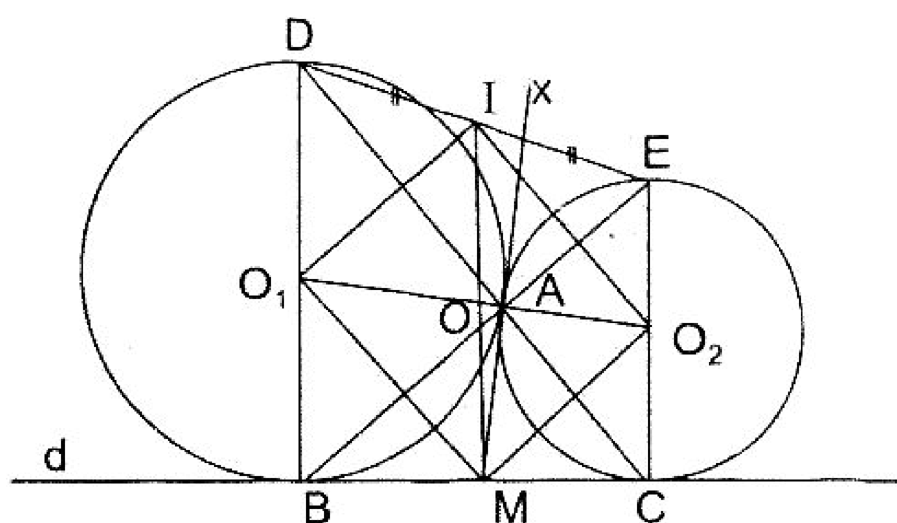
Thời gian vòi một , vòi hai chảy một mình đầy bể là 8 giờ; 12 giờ.

Bài 3. Hình 25

a) MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn O_1 nên

MA = MB. Tương tự có MA = MC. Do đó MB = MC.

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm đến đường tròn thì MO_1, MO_2 là phân giác của $\widehat{BMA}$ và $\widehat{CMA}$ suy ra $MO_1 \perp MO_2$ vậy ΔO_1MO_2 là tam giác vuông.



H.25

c) Vì MA = MB = MC nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{CAE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính CE). Vậy B, A, E thẳng hàng.

Tương tự có C, A, D thẳng hàng.

d) O_1I // BE; O_1M // DC (tính chất đường trung bình của tam giác) BE ⊥ DC (theo câu c) nên $\widehat{IO_1M} = 90^\circ$. Tương tự có $\widehat{M} = \widehat{O_2} = \widehat{I} = 90^\circ$, do đó IO_1MO_2 là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của O_1O_2 và IM thì đường tròn $\left(O; \frac{IM}{2}\right)$ ngoại tiếp IO_1MO_2, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác IO_1O_2 qua M (vì trùng với đường tròn $(0; \frac{IM}{2})$).

BD, CE cùng vuông góc với BC nên BD // CE do đó BDEC là hình thang, IM là đường trung bình của hình

thang BDEC nên IM ⊥BC. Vậy đường tròn $(0;\frac{IM}{2})$ tiếp xúc với d tại M.

Bài 4. Giả sử hệ $\begin{cases} x^2-(2m-3)x+6=0 & (1) \\ 2x^2+x+(m-5)=0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm x

Rút m từ (2) được $m = 5 - 2x^2 - x$ rồi thay vào (1) được:

$4x^3 + 3x^2 - 7x + 6 = (x + 2)(4x^2 - 5x + 3) = 0$.

Biết $4x^2 - 5x + 3 = 0$ vô nghiệm vì $\Delta < 0$, nên

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$, do đó $m = 5 - 8 + 2 = -1$.

Vậy với $m = -1$, thay vào hệ được nghiệm $x = -2$.

Đề 19

Bài 1. 1) Rút gọn: $6\sqrt{48}-2\sqrt{27}-4\sqrt{75}$

2) Giải phương trình:

$$\sqrt{x-4}=\sqrt{2-x}.$$

Bài 2. Cho phương trình có ẩn x (m là tham số):

$$x^2 - mx + m - 1 = 0$$

1) Chứng tỏ phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m; tính nghiệm kép (nếu có) của phương trình và giá trị của m tương ứng.

2) Đặt $A = x_1^2+x_2^2-6x_1x_2$

a) Chứng minh $A = m^2 - 8m + 8$;

b) Tìm m sao cho $A = 8$;

c) Tính giá trị nhỏ nhất của A và giá trị tương ứng của m.

Bài 3. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính cố định vuông góc AB và CD.

1) Chứng minh ABCD là hình vuông;

2) Lấy E di chuyển trên cung nhỏ BC (E khác B và C), trên tia đối của tia EA lấy đoạn EM = EB; chứng tỏ ED là phân giác của góc AEB và ED song song với MB.

3) Suy ra CE là đường trung trực của BM và M di chuyển trên đường tròn mà ta phải xác định tâm và tính bán kính theo R.

Bài 4. Cho đường thẳng (D) và đường tròn (O; R) có khoảng cách từ tâm O đến (D) là OH > R, lấy hai điểm bất kì A trên (D) và B trên (O; R). Hãy chỉ ra vị trí của A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất và chứng minh điều ấy.

Lời giải

Bài 1. 1). Rút gọn:

$6\sqrt{48}-2\sqrt{27}-4\sqrt{75}=6\sqrt{16.3}-2\sqrt{9.3}-4\sqrt{25.3}=$

$=24\sqrt{3}-6\sqrt{3}-20\sqrt{3}=-2\sqrt{3}.$

2) Giải phương trình:

$$\sqrt{x-4}=\sqrt{2-x}$$

Điều kiện của bài toán là: $\begin{cases}x-4\geq 0\\2-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4\\x\leq 2\end{cases}$

Không có giá trị nào của x thoả mãn đồng thời cả hai điều kiện kể trên, vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 2. 1) $\Delta = m^2 - 4(m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$.

Vì $(m - 2)^2 \geq 0$ tức $\Delta \geq 0$ nên phương trình đã cho có

nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta = (m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Khi đó $x_1 = x_2 = -\dfrac{-m}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

2) a) Theo Viét có:

$x_1 + x_2 = m$ (1) và $x_1 x_2 = m - 1$ (2)

$A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 8x_1x_2$

$= (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2$

Thay (1) và (2) vào (3) có:

$A = m^2 - 8(m - 1) = m^2 - 8m + 8$.

b) $A = 8 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 = 8 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0$

$\Leftrightarrow m(m - 8) = 0 \Rightarrow m = 0; m = 8$.

Vậy khi $m = 0$; $m = 8$ thì $A = 8$.

c) $A = m^2 - 8m + 8 = m^2 - 2.m.4 = 4^2 - 8 = (m - 4)^2 - 8$.

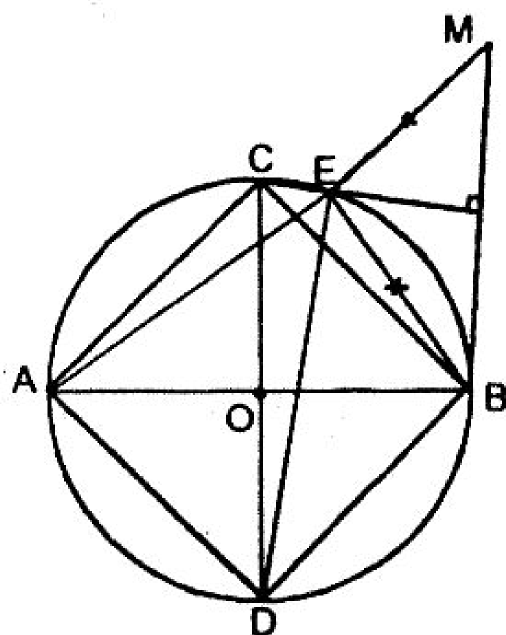
Vì $(m - 4)^2 \geq 0$ nên $A = (m - 4)^2 - 8 \geq -8$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -8 khi m = 4.

Bài 3. Hình 26

1) ABCD có OA = OB; OC = OD và $AB \perp CD$, AB = CD, nên là hình vuông.

2) Vì ABCD là hình vuông nên DA = DB $\Rightarrow \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DB}$ $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{DEB}$, do đó ED là phân giác của $\widehat{AEB}$.



H.26

ΔEBM cân (vì EB = EM) nên $\widehat{M} = \widehat{EBM}$ (1)

$\widehat{AEB} = \widehat{AED} + \widehat{DEB} = 2\widehat{AED} = \widehat{M} + \widehat{EBM}$ (2) (góc ngoài của một tam giác bằng tổng 2 góc trong không kề nó). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AED} = \widehat{M}$, do đó có ED // MB.

3) $\widehat{CED} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra CE ⊥ ED, ED // MB (chứng minh trên) do đó CE ⊥ MB.

CE là đường cao trong tam giác cân EBM cũng là trung trực, vậy CE là trung trực của BM.

Vì CE là trung của BM nên $CM = CB = R\sqrt{2}$. Vậy M chạy trên đường tròn (C; R') với $R' = R\sqrt{2}$.

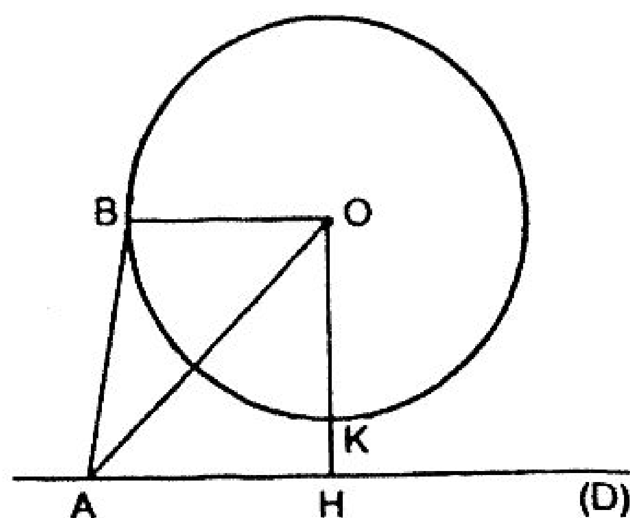
Bài 4. Hình 27

Gọi OH ⊥ (D) cắt đường tròn (O; R) tại K. Trong ΔABO có:

$AB + OB \geq OA \geq OH \Rightarrow AB \geq OH - OB = OH - OK = HK$

Vậy AB có độ dài ngắn nhất bằng HK

Khi A ≡ H và B ≡ K.



H.27

Đề 20

Bài 1. a) Giải bất phương trình:

$$\frac{(x^2+2)(5-4x)}{-3} \leq 0$$

b) Trên cùng một hệ trục toạ độ, đồ thị của hàm số $y = -3x + 4$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^2$ tại hai điểm A và B.

Hãy tìm toạ độ của hai điểm đó bằng các phép tính.

Bài 2. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh số $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ với số $\frac{\sqrt{20}+\sqrt{12}}{10}$.

Bài 3. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm P nằm giữa A và B. Nối C với P, cắt DA tại I. Đường thẳng vuông góc với CP tại C cắt AB ở K.

a) Chứng minh tứ giác ACKI nội tiếp, từ đó suy ra $\widehat{CIK} = 45^\circ$;

b) Gọi M là giao điểm hai đường chéo của hình vuông và N là trung điểm của IK. Chứng minh ba điểm M, B, N nằm trên một đường thẳng;

c) Chứng minh IK = $\sqrt{2}$ CK;

d) Giả sử AB = a, BP = x. Tính PI theo a và x;

e) Từ P hạ PQ vuông góc với IK (Q thuộc IK). Chứng minh rằng nếu P di động trên đoạn thẳng AB (P nằm giữa A và B) thì Q di động trên một đường thẳng cố định.

Bài 4. Cho $a + b \ge c \ge 0$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \ge \frac{c^4}{8}$.

Lời giải

Bài 1. a) Giải bất phương trình

$$\frac{(x^2+2)(5-4x)}{-3} \le 0 \Leftrightarrow (x^2+2)(5-4x) \ge 0.$$

Vì $x^2 + 2 > 0$ nên $5 - 4x \ge 0 \Leftrightarrow -4x \ge 5 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{4}$.

b) Toạ độ của hai điểm A và B chính là nghiệm của hệ

phương trình:

$$\begin{cases} y = -3x + 4 & (1) \\ y = x^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $x^2 + 3x - 4 = 0$

Do $1 + 3 + (-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -4$.

Thay giá trị của x_1, x_2 vào (2) có: $y_1 = 1; y_2 = 16$.

Vậy toạ độ của hai điểm A và B là:

A (1;1); B (-4; 16).

Bài 2. $$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{20}+\sqrt{12}}{10} = \frac{\sqrt{4.5}+\sqrt{4.3}}{10} = \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{10} =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{10} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} > \frac{\sqrt{20}+\sqrt{12}}{10}$ (Hai phân số có tử bằng nhau, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì lớn hơn).

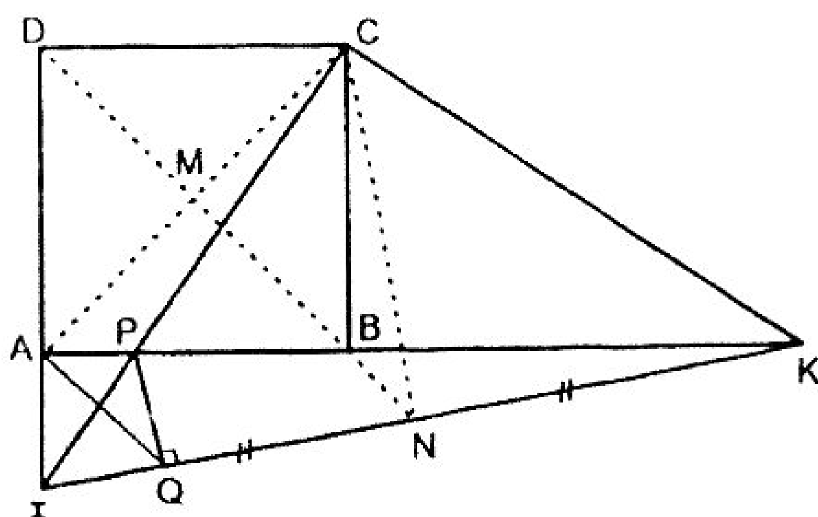
Bài 3. Hình 28

a) Ta có $\widehat{ICK} = 1v$ và $\widehat{IAK} = 1v$ (theo gt). Như vậy C và A cùng nhìn IK dưới một góc vuông nên C, A phải nằm trên đường tròn đường kính IK (theo quỹ tích cung chứa góc). Vậy tứ giác ACKI nội tiếp được đường tròn.

$\widehat{CIK} = \widehat{CAK}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CK}$ của đường tròn

đường kính IK) nhưng $\widehat{CAK} = 45°$ (đường chéo trong hình vuông là đường phân giác) nên $\widehat{CIK} = 45°$.

b) Vì hai đường chéo của hình vuông vừa vuông góc với nhau vừa cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên BD là trung trực của AC, tức là B nằm trên trung trực của AC.



H.28

Do ΔIAK vuông và ΔICK vuông, có N là trung điểm của IK nên $AN = \frac{1}{2}IK$, $CN = \frac{1}{2}IK$ suy ra N cách đều A, C tức là N cũng nằm trên trung trực của AC.

Vậy ba điểm M, B, N cùng nằm trên một đường thẳng.

c) Trong tam giác vuông ICK có $\widehat{CIK} = 45°$ (Chứng minh câu a) thì $\widehat{CKI} = 45°$ do đó Δ ICK vuông cân, suy ra CI = CK.

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông ICK có:

$CI^2 + CK^2 = IK^2$ hay

$2CK^2 = IK^2 \Rightarrow IK = \sqrt{2}CK$

d) Tam giác vuông API và tam giác vuông BPC có $\widehat{API} = \widehat{CPB}$ (góc đối đỉnh) nên tam giác API đồng dạng với

tam giác BPC, suy ra:

$$\frac{PI}{PC} = \frac{AP}{BP} \Rightarrow PI = \frac{AP.PC}{BP} \quad (1)$$

Theo bài ra, ta có $AP = a - x$ (2)

và $PC = \sqrt{a^2 + x^2}$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1), có:

$$PI = \frac{(a-x)\sqrt{a^2+x^2}}{x}.$$

e) Ta có $\widehat{PAI} = 1v$, $\widehat{PQI} = 1v$, do đó $\widehat{PAI} + \widehat{PQI} = 2v$, vậy tứ giác APQI nội tiếp được đường tròn đường kính IP.

$\widehat{PAQ} = \widehat{CIK} = 45^{\circ}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính IP), suy ra $\widehat{AQI} = 45^{\circ}$.

Từ $\widehat{PAQ} = \widehat{QAI}$ ($= 45^{\circ}$) nên AQ là phân giác của $\widehat{PAI}$.

Vậy nếu P di động trên đoạn AB thì Q di động trên đường thẳng cố định là tia phân giác AQ của góc PAI.

Bài 4. Do $a + b \geq c \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq c^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq c^2$

Biết rằng $a^2 + b^2 \geq 2ab$, do đó $2(a^2 + b^2) \geq c^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 \geq \frac{c^4}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \geq \frac{c^4}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \geq \frac{c^4}{4} \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{8}.$$

Đề 21

Bài 1. 1) So sánh hai số: $2 + \sqrt{3}$ và 7 (không dùng máy tính).

2) Rút gọn: $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Bài 2. Trong hệ trục toạ độ vuông góc gọi (P) là đồ thị hàm số $y = x^2$.

1) Vẽ (P)

2) Gọi A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là: -1 và 2. Viết phương trình đường thẳng AB.

3) Viết phương trình của đường thẳng (D) song song với AB và tiếp xúc với (P)

Bài 3. Cho đường tròn (O; R) và điểm A với $OA = R\sqrt{2}$, một đường thẳng (d) quay quanh A cắt (O) tại M, N; gọi I là trung điểm của đoạn MN.

1) Chứng tỏ OI vuông góc với MN, suy ra I di chuyển trên một cung tròn cố định với hai điểm giới hạn B, C thuộc (O).

2) Tính theo R độ dài AB, AC. Suy ra A, O, B, C là đỉnh của hình vuông.

3) Tính theo R diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi đoạn AB, AC và cung nhỏ BC của (O).

4) Hãy chỉ ra vị trí của đường thẳng (d) tương ứng lúc tổng AM + AN lớn nhất và chứng minh điều ấy.

Lời giải

Bài 1. 1) Xét bất đẳng thức: $2 + \sqrt{3} > \sqrt{7}$

$\Leftrightarrow 4 + 3 + 4\sqrt{3} > 7 \Leftrightarrow 7 + \sqrt{3} > 7.$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng, vậy $2 + \sqrt{3} > \sqrt{7}$.

2) Rút gọn:

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} + 1}$$

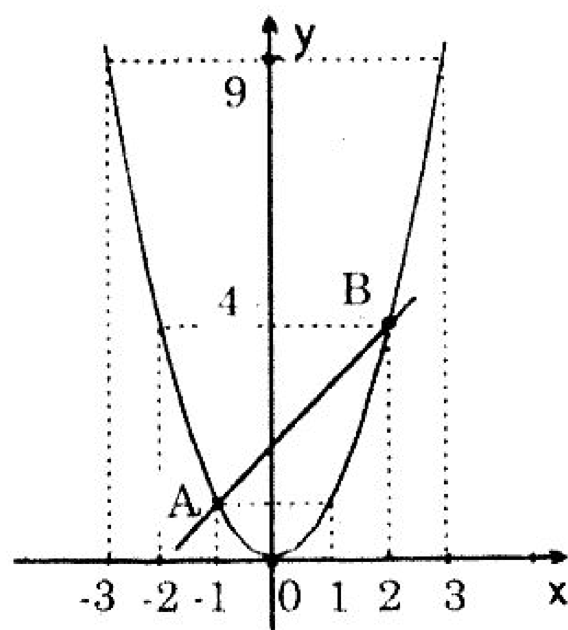
$$= \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1.$$

Bài 2. 1) Hàm số $y = x^2$ xác định với mọi giá trị $x \in R$. Với $x > 0$ hàm số đồng biến, với $x < 0$ hàm số nghịch biến.

Bảng giá trị

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

Đồ thị hàm số $y = x^2$ như hình bên



2) Phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$.

Đường thẳng qua A, nên có $1 = -a + b$ (1)

Đường thẳng qua B, nên có $4 = 2a + b$ (2).

Lấy (2) trừ (1) vế với vế được $a = 1$, suy ra $b = 2$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = x + 2$.

3) Đường thẳng D song song với AB có dạng $y = x + b$,

đường thẳng này lại tiếp xúc với $y = x^2$, nên phương trình hoành độ giao điểm của chúng là:

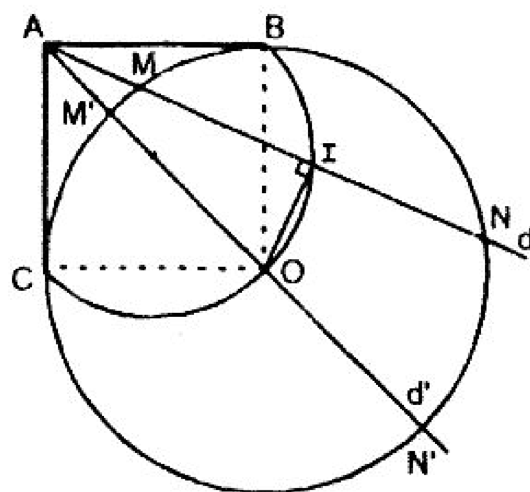
$x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 - x - b = 0$ (3)

Phương trình (3) có nghiệm kép khi:

$\Delta = 1 + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình đường thẳng D là $y = x - \frac{1}{4}$.

Bài 3. Hình 29



H.29

1) Theo giả thiết IM = IN nên OI ⊥ MN (tính chất đối xứng của đường tròn) suy ra $\hat{I} = 90^\circ$; I nhìn AO cố định dưới góc không đổi bằng 90° nên I di chuyển trên đường tròn đường kính AO.

Nhưng I nằm trong đường tròn O, nên I chỉ di chuyển trên cung BOC nằm trong hình tròn (O).

2) Do B nằm trên đường tròn đường kính AO nên $\widehat{ABO} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó tam giác ABO vuông tại B.

$\sin \widehat{BAO} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \widehat{BAO} = 45^\circ$, do đó tam giác ABO vuông cân, nên AB = R.

Tương tự có AC = R

Tứ giác ABOC có 4 cạnh bằng nhau và $\widehat{ABO}$ = 1v, nó là hình vuông.

3) Gọi S_1 là phần mặt phẳng giới hạn bởi AB, AC và cung nhỏ BC, do đó

$S_1 = S_{h\ vuông\ ABOC} - S_{quạt\ COBC}$

$S_{h\ vuông\ ABOC} = AB.\ OB = R^2$

S quạt COBC = $\dfrac{\pi R^2 90}{360} = \dfrac{\pi R^2}{4}$.

$S_1 = R^2 - \dfrac{\pi R^2}{4} = \dfrac{R^2}{4}(4 - \pi)$ (đơn vị diện tích)

4) Có thể xem AMN là đường thẳng d bất kì qua A. Kẻ đường thẳng d' đi qua A và O cắt đường tròn (O) tại M' và N'. Phải chứng minh AM' + AN' có giá trị lớn nhất, muốn vậy cần chứng minh rằng AM' + AN' > AM + AN.

Thật vậy:

AM + AN = AM + AM + MN

= 2 AM + 2MI (vì I là trung điểm của MN)

= 2 (AM + MI) = 2 AI (1)

AM' + AN' = AM' + AM' + M'N'

= AM' + AM' + M'O + ON'

= 2 (AM' + M'O) = 2AO (2)

Rõ ràng AO > AI nên từ (1) và (2) suy ra 2AO > 2AI hay AM' + AN' > AM + AN.

Đề 22

Bài 1. a) Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông không bằng nhau, cạnh lớn dài hơn cạnh nhỏ 7cm. Tính độ dài mỗi cạnh của góc vuông, biết rằng cạnh huyền dài 17cm.

b) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{8+\sqrt{60}} + \sqrt{45} - \sqrt{12}$

Bài 2. Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2, không giải phương trình, hãy tính tổng $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Vẽ dây cung AB không đi qua tâm O và vẽ các đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với AB là lượt tại A và B. Lấy điểm P trên cung nhỏ AB. Từ O vẽ hai tia vuông góc với các dây cung AP và BP. Tia vuông góc với AP cắt d_1 tại M, còn tia vuông góc với BP cắt d_2, tại N.

a) Chứng minh $\widehat{MON} = \widehat{AOM} + \widehat{BON}$;

b) Chứng minh hệ thức $AM.BN = R^2$;

c) Nếu P là điểm chính giữa của cung nhỏ AB thì tứ giác AMPO là hình gì? Vì sao?

d) Giả sử $\widehat{AOB} = 120^\circ$ và P là điểm chính giữa của cung nhỏ AB:

1) Chứng minh ba điểm B, P, M nằm trên một đường thẳng;

2) Tính AB theo R.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$M = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$ với x, y là các số thực.

Lời giải

Bài 1. a) Gọi độ dài cạnh góc vuông lớn của tam giác vuông đã cho là x cm ($x > 7$) thì độ dài cạnh góc vuông nhỏ là $(x - 7)$ cm.

Theo đầu bài và theo định lí Pitago có phương trình:

$x^2 + (x - 7)^2 = 17^2$.

Giải phương trình được $x_1 = 15$ và $x_2 = -8$ (loại)

Vậy cạnh lớn của góc vuông là 15cm, cạnh nhỏ là 8cm.

b) Rút gọn biểu thức A

$$A = \sqrt{8+\sqrt{60}} + \sqrt{45} - \sqrt{12}$$

$$= \sqrt{3+5+2\sqrt{5.3}} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3} \left(\text{do } \sqrt{5}+\sqrt{3} > 0\right)$$

$$= 4\sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Bài 2. Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 nên theo định lí Viét ra có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3 \qquad (1)$$

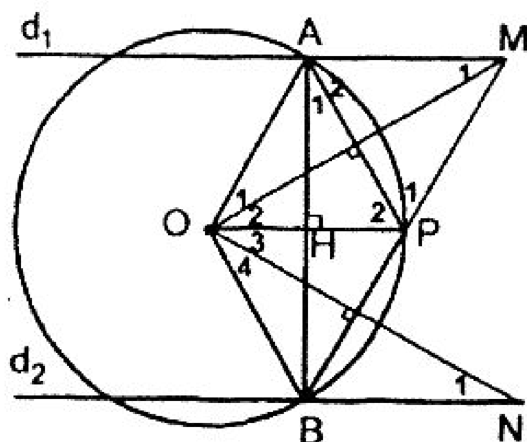
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra x_1, x_2 cùng dấu và kết hợp với (1) ta có: $x_1 > 0$; $x_2 > 0$. Biết rằng $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}$

và theo (1), (2) ta có:

$$\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = 3 + 2 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5}.$$

Bài 3. Hình 30



H.30

a) Vì OA = OP nên ΔOAP cân. Theo giả thiết $OM \perp AP$ nên OM là phân giác trong của $\widehat{AOP}$.

Suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (1). Chứng minh tương tự có $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MON} = \widehat{AOM} + \widehat{BON}$.

b) $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

sđ $\widehat{A_1} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BP}$. sđ $\left(\widehat{O_3} + \widehat{O_4}\right)$ = sđ $\overset{\frown}{BP}$

$\Rightarrow$ sđ $\widehat{O_3} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BP}$ do đó $\widehat{A_1} = \widehat{O_3}$.

Do đó suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{O_3}$.

Chứng minh tương tự, có $\widehat{O_1} = \widehat{N_1}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\Delta OAM \backsim \Delta NBO$, do đó có:

$\frac{OA}{BN} = \frac{AM}{BO} \Rightarrow AM \cdot BN = OA \cdot OB = R^2$.

c) OM là đường cao trong tam giác cân AOP nên OM là trung trực của AP suy ra ΔAMP cân và $\widehat{A_2} = \widehat{P_1}$. Nhưng $\widehat{A_2} = \widehat{P_2}$ (sole trong) do đó $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$, suy ra ΔOPM cân.

Từ đó có PM = AM = OP = OA nên tứ giác OAMP là hình thoi (theo nhận biết).

d) Theo giả thiết $\widehat{AOB} = 120^\circ$ suy ra $\widehat{AOP} = 60^\circ$, do đó

$\widehat{P_2} = \widehat{P_1} = \widehat{P_3} = 60^\circ$ tức là $\widehat{P_1} + \widehat{P_2} + \widehat{P_3} = 180^\circ$ nên B, P, M cùng nằm trên một đường thẳng.

e) Hạ OH vuông góc với AB thì H là trung điểm của OP, nên theo định lí Pitago có:

$OA^2 = OH^2 + AH^2$.

Suy ra

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $AB = 2.\ AH = 2\ .\ \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$

Chú ý: Nhận thấy tam giác vuông AHO có $\widehat{AOH} = 60^\circ$, nên AH là đường cao trong tam giác đều cạnh là R, suy ra $AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ và do đó $AB = R\sqrt{3}$.

Bài 4. Ta có $2M = -(x - y)^2 - (x - 2)^2 - (y - 2)^2 + 8$.

Nhận thấy $-(x - y)^2 - (x - 2)^2 - (y - 2)^2 \leq 0$ nên $2M \leq 8 \Leftrightarrow M \leq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 2$, khi đó $M_{max} = 4$.

Đề 23

Bài 1. Giải phương trình sau:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

b) $\dfrac{2}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x^2 - 2x} + \dfrac{x - 4}{x^2 + 2x} = 0$.

Bài 2. Xem xét đường thẳng (Am) có phương trình $y = m(m - 2)x + 3m + 3$, và đường thẳng (Bm) có

phương trình y = (m + 4)x + m + 1.

a) Với m = 1, hãy vẽ đồ thị hai đường thẳng (A_1) và (B_1) trên cùng một hệ trục toạ độ;

b) Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng (Am) và (Bm) song song với nhau (khi vẽ chúng trên cùng hệ trục)?

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính EF. Từ O vẽ Ot vuông góc với EF, nó cắt nửa đường tròn tại I. Trên tia Ot, lấy điểm A sao cho IA = IO. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AP, AQ với nửa đường tròn, chúng lần lượt cắt đường thẳng EF tại B và C (P, Q là các tiếp điểm).

a) Chứng minh các tam giác IPO và ABC là các tam giác đều;

b) Từ điểm S tuỳ ý trên cung PQ, vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn nó cắt AP tại H, cắt AC tại K. Tính số đo của góc HOK;

c) Gọi M và N lần lượt là giao điểm của PQ với OH và OK. Chứng minh O, H, K, Q cùng nằm trên một đường tròn;

d) Chứng HK = 2MN.

Bài 4. Với giá trị nào của a, b thì phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\frac{a}{ax-1}+\frac{b}{bx-1}=\frac{a+b}{(a+b)x-1}$.

Lời giải

Bài 1. Giải các phương trình:

a) Do $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a} = 6$, suy ra $x_1 = 2$;

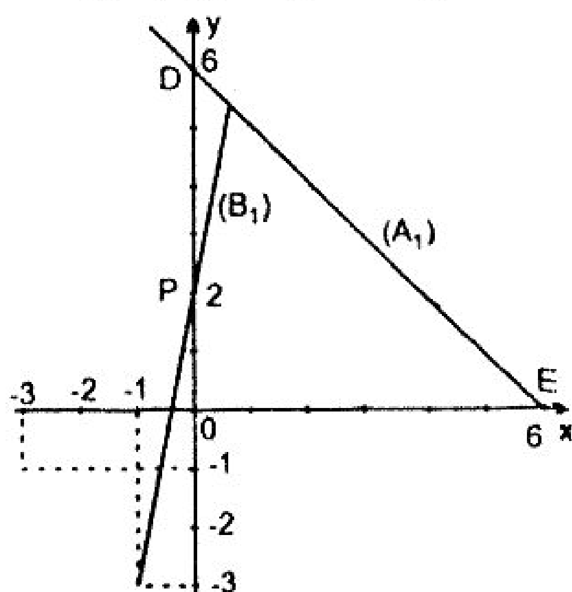
$x_2 = 3$.

b) Điều kiện của ẩn số $x \neq \pm 2$, $x \neq 0$ và mẫu chung là $x(x - 2)(x + 2)$, sau khi biến đổi có:

$2x - (x + 2) + (x - 2)(x - 4) = 0$ hay $x^2 - 5x + 6 = 0$ (2).

Theo câu a có $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Nhưng $x_1 = 2$ không thoả mãn điều kiện của bài toán, nên phương trình (2) có nghiệm $x = 3$.

Bài 2. a) Với m = 1, đường thẳng (A_1) có phương trình: $y = -x + 6$, đường thẳng (B_1) có phương trình: $y = 5x + 2$.



Đường thẳng (A_1) đi qua: D(0 ; 6) và E(6 ; 0)

Đường thẳng (B_1) đi qua: P (0 ; 2) và Q (-1 ; -3).

b) Điều kiện của m để hai đường thẳng (Am) và (Bm) song song với nhau là:

$$\begin{cases} m(m-2) = m + 4 & (1) \\ 3m + 3 \neq m + 1 & (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta có: $m^2 - 2m - m - 4 = 0$

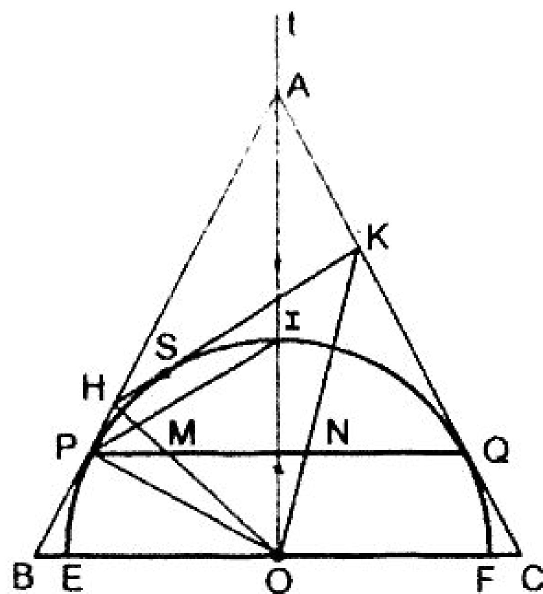
$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -1$; $m_2 = 4$.

Với m = -1 thì (2) không thoả mãn, vậy m = 4 là thích hợp. Vậy với m = 4 thì hai đường thẳng (A_4) và (B_4) song song với nhau. Thật vậy, đường thẳng (A_4) khi đó có phương trình: $y = 8x + 15$, và đường thẳng (B_4) có phương trình: $y = 8x + 5$.

Rõ ràng a = a' = 8 và b = 15 ≠ b' = 5.

Bài 3. Hình 31

a) Tam giác APO vuông tại P (vì AB là tiếp tuyến của đường tròn tâm O nên OP ⊥ AB). Theo giả thiết IO = IA nên PI là trung tuyến ứng với cạnh huyền suy ra PI = IA = IO = R do đó ΔIPO đều.



H.31

$\Delta AOB = \Delta AOC$ (vì $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ và có OA chung) $\Rightarrow$ AB = AC hay ΔABC cân.

Vì ΔIPO đều nên $\widehat{POI} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{PAO} = 30^\circ$ do đó $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, nó là tam giác đều.

b) Tứ giác APOQ có $\hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ$ và $\hat{A} = 60^\circ$ nên $\widehat{POQ} = 120^\circ$.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta POH = \Delta SOH$, nên OH là phân giác của $\widehat{POS}$, tương tự có OK là phân giác của $\widehat{SOQ}$, từ đó suy ra $\widehat{HOK} = \dfrac{\widehat{POQ}}{2} = 60^\circ$.

c) Chứng minh tương tự như câu a có ΔAPQ đều suy ra $\widehat{PQA} = 60^\circ$. Ta có $\widehat{MOK}\left(=\widehat{HOK}\right) = 60^\circ$ và $\widehat{PQA} = 60^\circ$, như vậy O, Q cùng nhìn HK dưới một góc bằng nhau nên O, H, K, Q cùng nằm trên một đường tròn (theo quỹ tích cung

chứa góc).

d) Tứ giác MOQK nội tiếp được đường tròn, có $\widehat{OQK}$ = 1v nên $\widehat{OMK}$ = 1v. Tam giác vuông OMK có $\widehat{MOK} = 60^\circ$ do đó $OM = \frac{1}{2}OK$. Chứng minh tương tự có $ON = \frac{1}{2}OH$.

Hai tam giác OMN và OKH có $\hat{O}$ chung vì $\frac{OM}{OK} = \frac{ON}{OH} = \frac{1}{2}$ nên $\Delta OMN \backsim \Delta OKH$, suy ra $\frac{MN}{KH} = \frac{OM}{OK} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ HK = 2MN.

Bài 4. Phương trình đã cho có nghĩa khi $ax \neq 1$, $bx \neq 1$, $(a + b)x \neq 1$ (1). Với điều kiện này, phương trình đã cho biến đổi thành:

$$\left[\frac{a}{ax-1} - \frac{a}{(a+b)x-1}\right] + \left[\frac{b}{bx-1} - \frac{b}{(a+b)x-1}\right] = 0.$$

Thu gọn lại, ta có: $abx[(a + b)x - 2] = 0$ (2).

Phương trình (2) luôn có một nghiệm x = 0 (thoả mãn (1)).

Để (2) có nghiệm duy nhất thì $a \neq 0$, $b \neq 0$, vì ngược lại thì (2) có vô số nghiệm.

Vậy (2) có nghiệm duy nhất với điều kiện:

* hoặc $(a + b)x - 2 = 0$ vô nghiệm và $a \neq 0$, $b \neq 0$.

* hoặc $(a + b)x - 2 = 0$ có nghiệm x = 0 (không xảy ra) và $a \neq 0$, $b \neq 0$.

* hoặc $(a + b)x - 2 = 0$ có nghiệm, nhưng nghiệm này không thoả mãn (1) và $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Đáp số: Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $a + b = 0$

hoặc $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $a = b$.

Đề 24

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + 1 = 0 \end{cases}$

Bài 2. Giải bất phương trình $(x - 1)(x + 2) < x^2 + 4x$.

Bài 3. a) Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \sqrt{175} - 2\sqrt{2}$

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $2x^2 - 4x - m + 3 = 0$ (m là tham số) vô nghiệm?

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ trung tuyến AM và phân giác AD của góc BAC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB tại P và cắt AC tại Q.

1) Chứng minh: $\widehat{BAM} = \widehat{PQM}$; $\widehat{BPD} = \widehat{BMA}$;

2) Chứng minh: BD.AM = BA.DP;

3) Giả sử BC = a, AC = b, BD = m. Tính $\dfrac{BP}{BM}$ theo a, b, m;

4) Gọi E là điểm chính giữa của cung PAQ và K là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh ba điểm D, K, E nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Bài 1. Cộng vế với vế của hệ hai phương trình ta có:

$$(x - 1)^2 + (x - y)^2 = 0$$

Biết rằng $(x - 1)^2 \ge 0$ và $(x - y)^2 \ge 0$ với mọi giá trị của x và y nên tổng $(x - 1)^2 + (x - y)^2 \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = y = 1$.

Bài 2. Giải bất phương trình trên có nghiệm $x > -\frac{2}{3}$

Bài 3. a) Rút gọn

$$P = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{\left(\sqrt{8}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2} =$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{7}$$

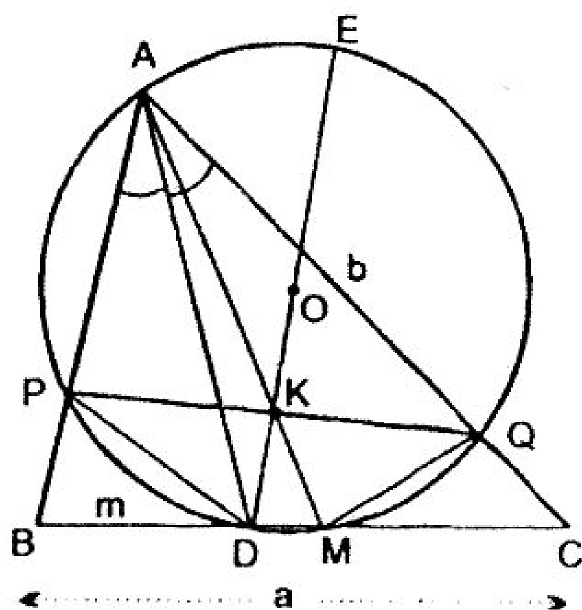
b) Phương trình $2x^2 - 4x - m + 3 = 0$ vô nghiệm khi $\Delta' < 0$.

$\Delta' = 4 - 2(-m + 3) = 4 + 2m - 6 = 2m - 2$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy với $m < 1$ thì phương trình $2x^2 - 4x - m + 3 = 0$ vô nghiệm.

Bài 4. Hình 32



H.32

1) $\widehat{BAM}$ và $\widehat{PQM}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PM}$ của đường tròn ngoại tiếp ΔADM nên $\widehat{BAM} = \widehat{PQM}$.

Từ giác APDM nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{APD} + \widehat{BMA} = 2v$, mặt khác $\widehat{APD} + \widehat{BPD} = 2v$, do đó

$\widehat{BPD} = \widehat{BMA}$.

2) Tam giác BDP và tam giác BAM có $\hat{B}$ chung và $\widehat{BPD} = \widehat{BMA}$ nên $\Delta BDP \backsim \Delta BAM$, suy ra:

$$\frac{BP}{BM} = \frac{BD}{BA} = \frac{DP}{AM} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra BD.AM = BA.DP.

3) Vì AD là phân giác của góc BAC nên

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ hay } \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \quad (2)$$

(theo tính chất đường phân giác của tam giác).

Từ (1) và (2) có $\frac{DC}{AC} = \frac{BP}{BM} \Rightarrow \frac{BP}{BM} = \frac{a-m}{b}$.

4) Do $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ suy ra $\overset{\frown}{DP} = \overset{\frown}{DQ}$ lại có $\overset{\frown}{PE} = \overset{\frown}{EQ}$ (vì E là điểm chính giữa của cung PQ) do đó $\overset{\frown}{DP} + \overset{\frown}{PE} = \overset{\frown}{DQ} + \overset{\frown}{EQ}$ hay DE là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADM, vậy D, O, E thẳng hàng.

Đường kính DE đi qua điểm chính giữa E của $\overset{\frown}{PQ}$ thì phải đi qua trung điểm K của dây PQ, do đó K, O, E thẳng hàng.

Từ các kết quả trên suy ra D, K, E nằm trên một đường thẳng.

Đề 25

Bài 1. Phân tích ra thừa số:

1) $\sqrt{a.b} - \sqrt{a}$; 2) $\sqrt{a.x} + \sqrt{b.x} - \sqrt{a.y} - \sqrt{b.y}$;

3) $a - 5\sqrt{a} + 6$; 4) $a^2 - \sqrt{a}$

Bài 2. Cho biểu thức:

$$A = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

1) Rút gọn biểu thức A;

2) Tính giá trị của biểu thức A biết

$$x = \frac{1}{2+\sqrt{3}},\ y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

Bài 3. Cho phương trình:

$x^2 + 3x + m = 0$ (1), ẩn là x.

1) Giải phương trình (1) với m = 0? m = 2? m = 1993?

2) Xác định giá trị của m để nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3$ là nghiệm của phương trình (1).

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân, vuông tại A, cạnh AB = AC = 2a và một đường tròn tâm O nội tiếp ΔABC, L là điểm di động trên cạnh BC; H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ L đến cạnh AB, AC.

1) Tứ giác AKLH là hình gì? Gọi E là trung điểm đoạn BC, chứng minh 5 điểm A, K, L, E, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Tính độ dài cạnh BC, bán kính r của đường tròn tâm O, và diện tích hình giới hạn bởi đường tròn tâm O và tam giác ABC theo a.

3) Tìm tập hợp tâm I của đường tròn qua 5 điểm A, K E, L, H khi L di động trên cạnh BC.

Lời giải

Bài 1. Phân tích ra thừa số

1) $\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-1\right)$

2) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

3) $\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}-3\right)$.

4) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a-1}\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)$.

Bài 2. 1) Rút gọn: Với $x > 0$, $y > 0$ và $x \neq y$ có $A = x - y$.

2) Tính giá trị:

$$A = x - y = \frac{1}{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}{4-3} = -2\sqrt{3}.$$

Bài 3. 1) Giải phương trình:

a) Với $m = 0$, nghiệm của phương trình là $x_1 = 0$; $x_2 = -3$.

b) Với $m = 2$, nghiệm của phương trình là $x_1 = -1$; $x_2 = -2$

c) Với $m = 1993$ thì $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.

2) Trước hết giải phương trình:

$\sqrt{4x^2-4x+1} = 3$ được nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Với $x_1 = -1$ thì $m = 2$.

Với $x_2 = 2$ thì $m = -10$.

Bài 4. Hình 33

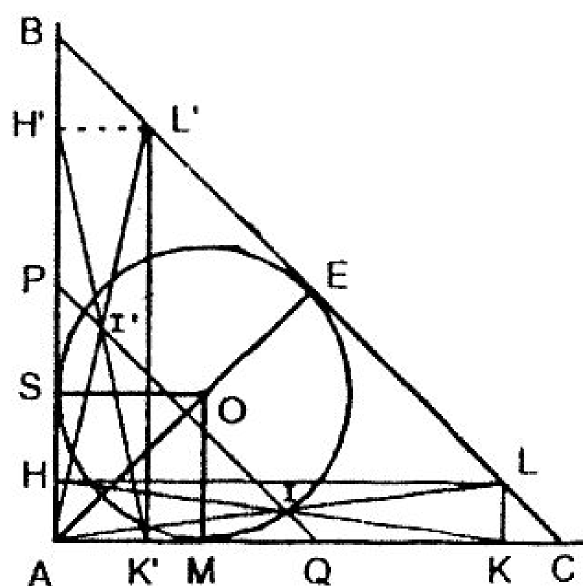
1) Tứ giác AKLH có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật. Gọi I là trung điểm của AL suy ra IA = IL = IK = IH (1).

Vì E là trung điểm của BC nên $AE \perp BC$. Trong tam

giác vuông AEL thì EI là trung tuyến đi tới cạnh huyền nên IE = IA = IL (2).

Từ (1) và (2) suy ra A, K, L, E, H nằm trên đường tròn tâm I.

2) Vì ΔABC vuông cân nên là nửa hình vuông cạnh bằng 2a, do đó đường chéo của hình vuông là $BC = 2a\sqrt{2}$.



H.33

Gọi S, M là tiếp điểm của BA và AC đối với đường tròn tâm (O), có ASOM là hình vuông, do đó r = SO = SA = BA - BS = 2a - BE = $2a - a\sqrt{2} = a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Gọi S là diện tích giới hạn bởi diện tích ΔABC và diện tích hình tròn tâm (O) thì có:

$$S = S_{\Delta ABC} - S_{\text{hình tròn }(O)}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2a.2a - \pi 2a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2a^2\left[1-\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right].$$

3) Qua trung điểm I của AL dựng PQ song song với BC thì dễ dàng chứng minh rằng PQ là đường trung bình của ΔABC. Như vậy, khi L di động trên BC thì I nằm trên đường trung bình PQ của ΔABC.

Nếu lấy I' bất kì thuộc PQ, nối AI' cắt BC tại L', hạ L'K', L'H' lần lượt vuông góc với AC, AB thì AK'L'H' là

hình chữ nhật suy ra được I'A = I'K' = I' E = I'L' = I'H'. Vậy I' là tâm đường đi qua 5 điểm A, K', E, L', H'.

Vậy tập hợp tâm I của đường tròn đi qua 5 điểm A, H, E, L, K khi L chạy trên BC là đường trung bình PQ của ΔABC.

Đề 26

Bài 1. Cho biểu thức sau với a > 0 và a ≠ 4:

$$M = \left[\frac{\left(16-\sqrt{a}\right)\sqrt{a}}{a-4} + \frac{3+2\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}} - \frac{2-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}\right] : \frac{1}{a+4\sqrt{a}+a}$$

a) Rút gọn M.

b) Tìm a để M = 5

Bài 2. Cho phương trình sau với ẩn là x:

$$3x^2 - 4x + m + 5 = 0 \; (1)$$

a) Giải phương trình (1) với m = -4;

b) Xác định m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{4}{7}$.

Bài 3. Tỉ số giữa tuổi của An và tuổi của bố An hiện nay là $\frac{1}{3}$. Sau đây 5 năm nữa thì tỉ số đó là $\frac{2}{5}$. Tính tuổi của An và tuổi của bố An hiện nay.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB; I là trung điểm đoạn AO. Qua I vẽ dây CD vuông góc với AB, K

là trung điểm đoạn BC.

a) Chứng minh tứ giác CIOK nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh IC.ID = IA.IB.

c) Chứng minh 3 điểm D, O, K thẳng hàng.

d) Tính diện tích tam giác CBD nếu cho bán kính đường tròn tâm O là 1.

Lời giải

Bài 1. a) $M = \sqrt{a} + 2$

b) $M = 5 \Leftrightarrow a = 9$.

Bài 2. a) Với m = -4, phương trình đã cho có dạng

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

Vì $a + b + c = 0$ nên $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

b) Điều kiện để (1) có 2 nghiệm phân biệt: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{11}{3}$. Theo định lí Viét, có:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ (2) và $x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+5}{3}$ (3):

Từ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{4}{7}$, do đó theo (2), (3) có:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{m+5}{3}} = -\frac{4}{7} \Rightarrow m = -12\left(< -\frac{11}{3}\right).$$

Vậy m cần tìm là m = -12.

Bài 3. Gọi số tuổi của An hiện nay x (x > 0). Biết tỉ số

giữa tuổi của An và tuổi của bố An hiện nay là $\frac{1}{3}$ suy ra tuổi của bố An hiện nay 3x. Sau 5 năm nữa, tuổi của An là x +5 và tuổi của bố An là 3x + 5. Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{x+5}{3x+5}=\frac{2}{5}$$

Giải phương trình được x = 15; 3x = 3.15 = 45.

x = 15 ⇒ x > 0, thoả mãn điều kiện bài toán.

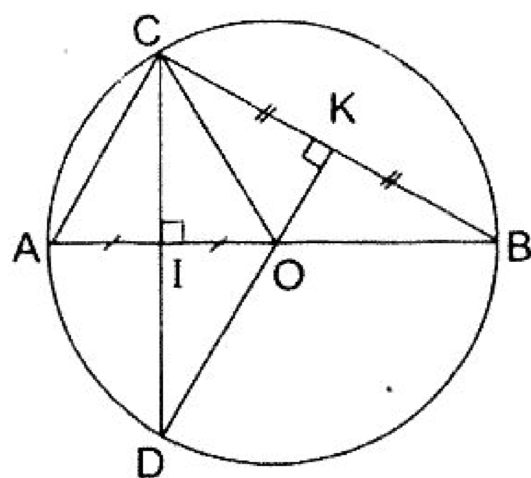
Thử lại: $\frac{x+5}{3x+5}=\frac{15+5}{45+5}=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$.

Trả lời: Tuổi của An hiện nay là 15

Tuổi của bố An hiện nay là 45.

Bài 4. Hình 34

a) Theo giả thiết KB = KC suy ra OK ⊥ BC (theo tính đối xứng của đường tròn). Tứ giác CIOK có $\hat{I}=\hat{K}$= 2v, nó nội tiếp được đường tròn.



H.34

b) Hai tam giác vuông ICA, IBD có $\widehat{ICA}=\widehat{IBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn AD) nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{IC}{IB}=\frac{IA}{ID}$ hay IC.ID = IA.IB.

c) Dễ dàng chứng minh được ACOD là hình bình hành, nên OD // AC, $\widehat{ACB}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên AC ⊥ CB, OK ⊥ CB suy ra OK // AC.

Từ O ở ngoài AC chỉ có một và chỉ một đường thẳng

song song với AC mà thôi do đó OD, OK phải cùng nằm trên một đường thẳng. Vậy D, O, K thẳng hàng.

d) Dễ dàng chứng minh ACOD là hình thoi, do đó ΔACO đều suy ra $\widehat{ACI} = 30^o$ và $\widehat{ICB} = 60^o$.

ΔBCD cân có $\widehat{ICB} = 60^o$ nên nó là tam giác đều, do đó

$BI = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{CB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CB = \sqrt{3} = CD.$

Vậy $S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2}.BI.CD = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$

Đề 27

Bài 1. a) Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{5\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{4 - 2x}$$

b) Chứng minh rằng:

$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-3x} \leq 3$ nghiệm đúng mọi giá trị của x thuộc tập xác định.

Bài 2. Cho parabol $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng $y = x + k$.

a) Với giá trị nào của k đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt.

b) Vẽ đồ thị và xác định toạ độ giao điểm của parabol và đường thẳng với k = -3.

Bài 3. Để chuẩn bị kỉ niệm 75 năm ngày thành lập trường, Đoàn trường dự định trồng cây xanh trong thời

gian đã định với dự kiến sẽ trồng 300 cây trong một ngày. Thực tế mỗi ngày trồng thêm được 100 cây nên đã trồng thêm được 600 cây và hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày. Tính số cây dự định trồng ban đầu.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông ở A có AB = 20cm, BC = 25cm. Đường tròn (O) đường kính AB cắt đường tròn (O') có đường kính AC ở H. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ HB, AD cắt đường tròn (O') ở E cắt BC ở F.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính chu vi tam giác AHB

c) Chứng minh 3 điểm O, E, O' thẳng hàng.

Lời giải

Bài 1. a) Rút gọn biểu thức A

$$A = \frac{5\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{4 - 2x} = \frac{5\sqrt{(x-2)^2}}{2(2-x)} = \frac{5|x-2|}{2(2-x)}.$$

Nếu x > 2 thì x - 2 > 0 nên |x - 2| = x - 2 = -(2 - x), do đó: $A = \frac{-5(2-x)}{2(2-x)} = -2,5.$

Nếu x < 2 thì x - 2 < 0 nên |x - 2| = - (x - 2) = 2 - x, do đó: $A = \frac{5(2-x)}{2(2-x)} = 2,5.$

b) Để chứng minh bất đẳng thức đã cho, trước hết chứng minh rằng với mọi a ≥ 0, b ≥ 0, c ≥ 0:

$$a + b + c \le \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} \qquad (1)$$

Thật vậy, a + b + c ≤ $\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \le 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \le 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

$\Leftrightarrow 2ab + 2ac + 2bc \le 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$

$\Leftrightarrow 0 \le a^2 - 2ab + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 + 2ac + c^2$

$\Leftrightarrow 0 \le (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - b)^2$ (2).

Bất đẳng thức (2) đúng, chứng tỏ bất đẳng thức (1) đúng.

Đặt a = $\sqrt{x+1}$, b = $\sqrt{2x-3}$ và c = $\sqrt{5-3x}$, áp dụng (1) có:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-3x}\le$$

$$\le\sqrt{3\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x-3}\right)^2+\left(\sqrt{5-3x}\right)^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-3x}\le$$

$$\le\sqrt{3\left(x+1+2x-3+5-3x\right)^2}=3$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với mọi giá trị của x thuộc tập xác định của nó.

Bài 2. a) Đường thẳng y = x + k cắt parabol y = $-\frac{x^2}{4}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình x + k = $-\frac{x^2}{4}$ có biệt số Δ dương. Ta có:

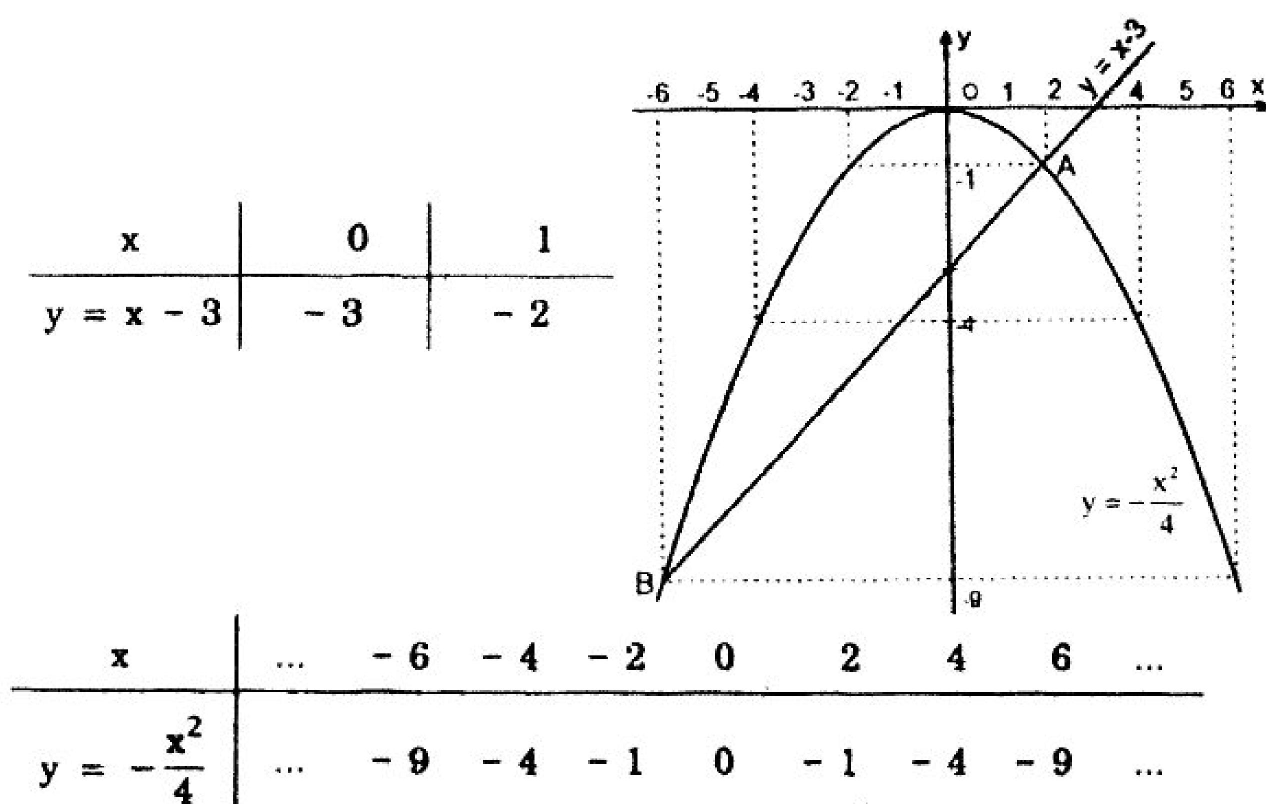
$$-\frac{x^2}{4}=x+k \Leftrightarrow x^2+4x+4k=0$$

$\Delta' = 4 - 4k$.

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - 4k > 0 \Leftrightarrow k < 1$.

Vậy với k < 1 thì đường thẳng y = x + k cắt parabol $-\frac{x^2}{4}$ tại hai điểm phân biệt.

b) Với k = -3, phương trình đường thẳng có dạng: $y = x - 3$



x	0	1
$y = x - 3$	-3	-2

x	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
$y = -\frac{x^2}{4}$	...	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	...

Toạ độ đỉnh của parabol O (0 ; 0).

Giao điểm của đường thẳng $y = x - 3$ và parabol $y = -\frac{x^2}{4}$ là A (2 ; -1) và B (-6 ; -9).

Bài 3. Gọi số cây dự định trồng ban đầu là x (với x nguyên dương), thì số ngày sự định trồng cây là $\frac{x}{300}$ ngày.

Nhưng mỗi ngày trồng thêm được 100 cây nên số cây đã trồng mỗi ngày là 400 cây. Cả đợt trồng thêm được 600 cây, do đó số cây đã trồng được tất cả là x + 600, do đó số ngày đã trồng cây là $\frac{x + 600}{400}$ ngày.

Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{x}{300} - \frac{x+600}{400} = 1$$

Giải ra ta được x = 3000

Sau khi thử lại, có kết quả:

Số cây dự định trồng là 3000 cây.

Bài 4. Hình 35

a) Theo định lí Pitago, có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow$

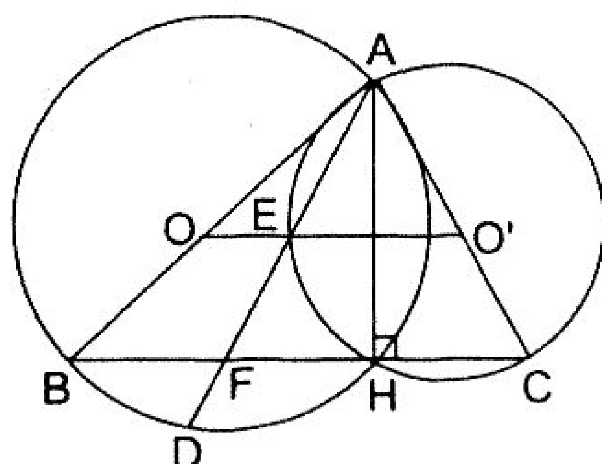
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.20.15 = 150\ (cm^2)$.

b) $\widehat{AHB} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

$\Delta AHB \backsim \Delta BAC$ (vì có $\hat{B}$ chung) nên:

$$\frac{AB + BC + AC}{HA + AB + HB} = \frac{BC}{AB} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}, \text{do đó}$$



H.35

HA + AB + HB =

$= \frac{4}{5}(AB + BC + AC) = \frac{4}{5}(20 + 25 + 15) = 48\ (cm)$.

c) Vì $\widehat{BAC} = 1v$ nên $\widehat{CAF} + \widehat{FAB} = 1v$, vì $\widehat{AHF} = 1v$ nên $\widehat{CFA} + \widehat{HAF} = 1v$, và $\widehat{HAF} = \widehat{FAB}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau) do đó $\widehat{CAF} = \widehat{CFA}$ hay ΔCAF cân.

Ta có $\widehat{CEA} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

đường kính AC) nên $CE \perp AD$.

Đường cao CE trong tam giác cân CAF cũng là trung tuyến nên EA = EF.

Trong ΔABF có OA = OB và EA = EF nên EO // BF hay EO // BC. Chứng minh tương tự có EO' // BC.

Qua E ở ngoài BC chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với BC mà thôi, do đó $EO \equiv EO'$, vậy O, E, O' thẳng hàng.

Đề 28

Bài 1. Tìm bốn số tự nhiên liên tiếp, biết rằng tích của bốn số đó bằng 3024

Bài 2. Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{8\sqrt{x}}{x-1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).$$

1) Rút gọn B

2) Tính giá trị của B khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

3) Chứng minh rằng $B \le 1$ với giá trị của $x \ge 0$ và $x \ne 1$.

b) Giải phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 5 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 9 \end{cases}$$

Bài 3. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{2(x^2-2)} + \sqrt{3(7-x^2)}$.

1) Tìm khoảng xác định của hàm số y

2) Tính giá trị lớn nhất của hàm số y và các gái trị tương ứng của x trong khoảng xác định đó.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O, bán kính r và hai đường kính bất kì AB và CD. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EA và AF.

1) Chứng minh rằng trực tâm H của tam giá BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA.

2) Hai đường kính AB và CD có vị trí tương đối như thế nào thì tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất? Hãy tính diện tích nhỏ nhất đó theo r.

Lời giải

Bài 1. Gọi x là số tự nhiên đầu tiên thì ba số tự nhiên liên tiếp sau x là x + 1; x + 2 và x + 3. Theo đầu bài có phương trình:

$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 3024$ hay

$[x(x + 3)][(x + 2)(x + 1)] = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)$
$= 3024.$

Đặt $x^2 + 3x = X$ với $X > 0$, ta có:

$X(X + 2) = 3024$ hay $X^2 + 2X - 3024 = 0$

$\Delta' = 1 + 3024 = 3025 = 55^2$

$X_1 = -1 + 55 = 54$; $X_2 = -1 - 55 = -55$ (loại).

Giải phương trình $x^2 + 3x = 54$ được $x_1 = 6$; $x_2 = -9$ (loại)

Bốn số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 6; 7; 8; 9.

Thử lại: 6. 7. 8. 9 = 48 . 63 = 3024

Đáp số: 6; 7; 8; 9.

Bài 2. 1) Rút gọn số bị chia, được: $\frac{-4\sqrt{x}}{x-1}$.

Rút gọn số chia, được : $-\frac{x+4}{x-1}$.

Thực hiện phép chia, có $B = \frac{4\sqrt{x}}{x+4}$

2) Tính B hi $x = 3 + 2\sqrt{2}$

$$B = \frac{4\sqrt{x}}{X+4} = \frac{4\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\left(3+2\sqrt{2}\right)+4} = \frac{4\sqrt{1+2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}}{7+2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}{7+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{7+2\sqrt{2}} = \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)\left(7-2\sqrt{2}\right)}{\left(7+2\sqrt{2}\right)\left(7-2\sqrt{2}\right)} = \frac{12+20\sqrt{2}}{41}$$

3) Với $x \geq 0$ ta có $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x+4 \geq 4\sqrt{x}$ (*)

Vì $x + 4 > 0$ nên từ (*) ta có $B = \frac{4\sqrt{x}}{x+4} \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 4$.

b) Từ hệ phương trình đã cho, suy ra $x \neq \pm y$. Khai triển, ta được:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - yx^2 - y^3 = 5 \\ x^3 - xy^2 + yx^2 - y^3 = 9 \end{cases}$$

Trừ vế với vế, được: $2xy^2 - 2yx^2 = -4$ hay $\Rightarrow x^2y - y^2x = 2$ hay $xy(x - y) = 2 \Rightarrow xy = \frac{2}{x-y}$ (*)

Biến đổi hệ đã cho về dạng sau:

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=5\\(x+y)^2(x-y)=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y=\frac{5}{x^2+y^2}\\x-y=\frac{9}{(x+y)^2}\end{cases}, \text{suy ra}$$

$$\frac{5}{x^2+y^2}=\frac{9}{(x+y)^2} \Rightarrow 5(x+y)^2=9(x^2+y^2) \Rightarrow$$

$5x^2 + 10xy + 5y^2 = 9x^2 + 9y^2 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 10xy = 0 \Rightarrow$

$4(x - y)^2 - 2xy = 0$ hay $xy = 2(x - y)^2$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $2(x - y)^2 = \frac{2}{x-y}$ hay $(x - y)^3 = 1$, do đó có $x - y = 1$ hay $x = y + 1$.

Kết hợp với phương trình thứ nhất của hệ đã cho, có:

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\x-y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2=5\\x^2-2xy+y^2=1\end{cases}$$ suy ra $2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$.

Từ hệ phương trình $\begin{cases}x+(-y)=1\\x(-y)=-2\end{cases}$

Áp dụng hệ thức Viét ta tính được $x_1 = 2; y_1 = 1$

$x_2 = -1; y_2 = -2$.

Các cặp giá trị tìm được thoả mãn hệ phương trình đã cho

Đáp số: $(x_1 = 2; y_1 = 1)$

$(x_2 = -1; y_2 = -2)$

Bài 3. 1) Khoảng xác định của hàm số:

Hàm số y xác định khi x thoả mãn hệ bất phương trình sau:

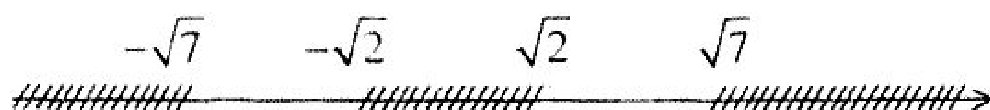
$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 & (1) \\ 2x^2 - 4 \geq 0 & (2) \\ 21 - 3x^2 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Ta thấy:

- Bất phương trình (1) đúng với mọi x

- Từ $2x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

- Từ $21 - 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 7 \geq x^2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{7} \Rightarrow -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$



Vậy khoảng xác định của hàm số là

$\left[-\sqrt{7}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; \sqrt{7}\right]$ (*)

2) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

Với x thoả mãn điều kiện (*) ta có $x^2 + 1 \geq 0$; $2x^2 - 4 \geq 0$; $21 - 3x^2 \geq 0$. Đặt $X = x^2 + 1$; $Y = 2x^2 - 4$; $Z = 21 - 3x^2$ ta được:

$X + Y + Z = 18$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho các số: $\sqrt{X}; \sqrt{Y}; \sqrt{Z}$ và các số 1; 1; 1, ta có:

$$\left(\sqrt{X} + \sqrt{Y} + \sqrt{Z}\right)^2 \leq (X + Y + Z)\left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)$$
$$= 3(X + Y + X) = 3.18 = 54$$

Do đó thấy rằng:

$y^2 = \left(\sqrt{X} + \sqrt{Y} + \sqrt{Z}\right)^2$ đạt giá trị lớn nhất tại giá trị $\sqrt{54}$.

Lúc đó phải có $\frac{X}{1} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{1}$

hay $x^2 + 1 = 2x^2 - 4 = 21 - 3x^2$(**).

Giải hệ phương trình này được $x^2 = 5$, do đó $x = \pm\sqrt{5}$, $x = \pm\sqrt{5}$ thuộc khoảng xác định của hàm số và thoả mãn điều kiện đặt ra của đề bài. Vậy hàm số y đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{54}$ tại $x = \pm\sqrt{5}$.

H.36

Đáp số: $\begin{cases} y_{max} = \sqrt{54} \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$

Bài 4. Hình 36

1) Đặt AE = a, AF = b thì theo giả thiết $AP = \frac{a}{2}$, $AQ = \frac{b}{2}$, $PQ = \frac{a+b}{2}$.

Vì CD là đường kính nên $\widehat{CBD} = 1v$. Trong tam giác

vuông BEF ta có: $AB^2 = AE.AF$ hay $4r^2 = a.b$ (*).

Dựng PI ⊥ BQ, PI cắt AB tại H thì H là trực tâm của ΔBPQ. Ta có ΔPAH ∽ ΔBAQ (vì $\widehat{A} = 1v, \widehat{P_1} = \widehat{B_1}$ vì là góc có cạnh tương ứng vuông góc) suy ra

$\frac{AH}{AQ} = \frac{AP}{AB}$ hay $\frac{AH}{b/2} = \frac{a/2}{2r} \Rightarrow AH = \frac{ab}{8r} = \frac{4r^2}{8r} = \frac{r}{2}$, vậy H là trung điểm của OA.

2) Diện tích của ΔBPQ là nhỏ nhất khi cạnh đáy PQ là ngắn nhất. Vì PQ = $\frac{a+b}{2}$ nên PQ nhỏ nhất khi a + b nhỏ nhất.

Vì $a.b = 4r^2$ không đổi. Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{4r^2} = 4r$.

Vậy a + b nhỏ nhất khi a + b = 4r, từ đó có a = b = 2r, khi đó thì PQ nhỏ nhất bằng 2r.

Tam giác BEF vuông cân (vì BA vừa là đường cao vừa là trung tuyến) do đó ΔBCD cũng vuông cân suy ra AB⊥CD.

Vậy khi hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau thì diện tích của tam giác BPQ sẽ nhỏ nhất và bằng $2r^2$.

Đề 29

Bài 1. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right).\left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$$

a) Rút gọn P;

b) Xét dấu của biểu thức: P . $\sqrt{1-a}$

Bài 2. Một ca nô xuôi từ bến A đến bến B với vận tốc 0km/h, sau đó lại ngược từ B trở về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian đi ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của ca nô lúc xuôi và lúc ngược bằng nhau.

Bài 3. Cho tam giác cân ABC (AB = AC; $\widehat{A} < 90^{\circ}$), một cung trong BC nằm bên trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi P là giao điểm của MB, IK và Q là giao điểm của MC, IH.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được;

b) Chứng minh rằng tia đối của tia MI là phân giác góc HMK;

c) Chứng minh rằng tứ giác MPIQ nội tiếp được. Suy ra PQ song song với BC;

d) Gọi (O_1) là đường tròn qua M, P, K; (O_2) là đường tròn qua M, Q, H; N là giao điểm thứ hai của (O_1), (O_2) và D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số (x ; y) thoả mãn phương trình sau:

$5x - 2\sqrt{x}(2 + y) + y^2 + 1 = 0$

Lời giải

Bài 1. a) Điều kiện $a \geq 0$; $a \neq 1$.

$P = \sqrt{a} - 1$.

b) $P . \sqrt{1-a} = \left(\sqrt{a} - 1\right).\sqrt{1-a}$.

Để $\sqrt{1-a}$ có nghĩa thì $a \leq 1$, kết hợp với $0 \leq a \neq 1$, được $0 \leq a < 1$. Do $\sqrt{a} < 1$ hay $\sqrt{a} - 1 < 0$.

Biết $\sqrt{1-a} > 0$ nên $P . \sqrt{1-a} < 0$.

Bài 2. Gọi khoảng cách AB là x km ($x > 0$) thì thời gian ca nô xuôi dòng là $\frac{x}{30}$ giờ và thời gian ngược dòng là $\frac{x}{20}$ giờ, có phương trình:

$$\frac{x}{20} - \frac{x}{30} = \frac{4}{3}.$$

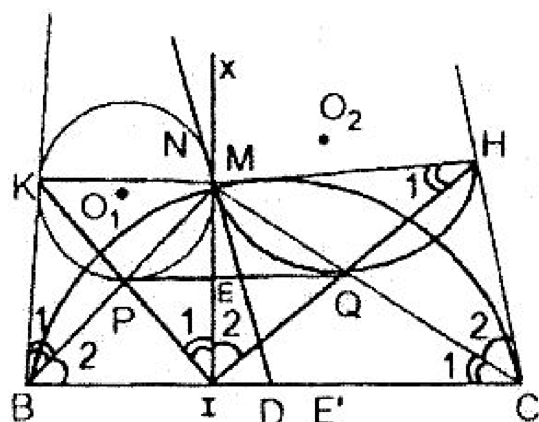
Giải phương trình được $x = 80$.

$x = 80 \Rightarrow x > 0$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Thử lại: $\frac{x}{20} - \frac{x}{30} = \frac{80}{20} - \frac{80}{30} = 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Trả lời: Khoảng cách AB là 80 km.

Bài 3. Hình 37



H.37

a) $MI \perp BC$, $MK \perp AB \Rightarrow \widehat{MIB} + \widehat{MKB} = 2v$, do đó BIMK nội tiếp được đường tròn.

Tương tự có MICH nội tiếp được tròn.

b) Do AB = AC nên

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Gọi tia đối của MI là Mx, các tứ giác BIMK, MICH nội tiếp nên $\widehat{IMH} = 180^\circ - \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B} = \widehat{IMK}$.

$\widehat{KMx} = 180^\circ - \widehat{IMK} = 180^\circ - \widehat{IMH} = \widehat{HMx}$.

Vậy Mx là tia phân giác của $\widehat{HMK}$.

c) Theo kết quả câu a có:

$\widehat{I_1} = \widehat{B_1}; \widehat{I_2} = \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{PIQ} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = \widehat{B_1} + \widehat{C_2}$.

$$\left.\begin{array}{l} sđ\ \widehat{B_2} = \frac{1}{2} sđ\,\widehat{CM} = sđ\,\widehat{C_2} \\ sđ\ \widehat{B_1} = \frac{1}{2} sđ\,\widehat{BM} = sđ\,\widehat{C_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{PIQ} = \widehat{C_1} + \widehat{B_2}.$$

Trong ΔBMC thì $\widehat{BMC} = 180^\circ - \left(\widehat{C_1} + \widehat{B_2}\right)$, do đó:

$\widehat{BMC} + \widehat{PIQ} = \widehat{C_1} + \widehat{B_2} + 180^\circ - \widehat{C_1} - \widehat{B_2} = 180^\circ$, nên tứ giác MPIQ nội tiếp được đường tròn.

Từ đó suy ra $\widehat{Q_1} = \widehat{I_1}$, nhưng $\widehat{I_1} = \widehat{B_1}$ và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{Q_1} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow PQ \,//\, BC$.

d) $\widehat{H_1} = \widehat{Q_1}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2} sđ\,\widehat{MQ}$).

Hai tia QP, QH nằm khác phía đối với QM nên đường tròn O_2 tiếp xúc với PQ tại Q, tương tự có đường tròn O_1, tiếp xúc với PQ tại P nên PQ là tiếp tuyến chung của O_1, O_2.

Gọi E, E' là giao điểm của MN với BC có $PE = \sqrt{EM.EN} = EQ$ (vì $\Delta PEM \backsim \Delta NEP$ và $\Delta EQM \backsim \Delta ENQ$).

Do $PQ \,//\, BC \Rightarrow \frac{EP}{E'B} = \frac{EQ}{E'C'}$, PE = EQ nên E'B = E'C hay $E' \equiv D$. Vậy N, M, D thẳng hàng.

Bài 4. Phương trình đã cho tương đương với phương

trình:

$$\left(2\sqrt{x}-1\right)^2+\left(y-\sqrt{x}\right)^2=0 \qquad (1)$$

Vế trái của (1) là tổng của hai biểu thức không âm, nên mỗi biểu thức phải bằng 0.

Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}-1=0 \\ y-\sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy cặp số phải tìm là $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

Đề 30

Bài 1. 1) Giải phương trình $x^2 + 6x - 91 = 0$

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y=9 \\ x-3y=1 \end{cases}$$

3) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2$

Bài 2. Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc trung bình là 40 km/h. Lúc đầu ô tô đi với vận tốc đó; khi còn 60 km nữa thì được nửa quãng đường AB, người lái xe tăng vận tốc 10 km/h trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB .

Bài 3. Cho hình vuông OABC. Trên cạnh OC lấy điểm

M, trên cạnh OA lấy điểm P sao cho AP = OM. Qua M vẽ đường thẳng song song với OA cắt AB ở N, qua P vẽ đường thẳng song song với OC cắt BC ở Q. Giả sử MN cắt PQ ở I.

1) Chứng minh tứ giác APIN là hình vuông.

2) Chứng minh tam giác IPM bằng tam giác NIB.

3) Chứng minh khi M, P lần lượt thay đổi trên các cạnh OC, OA thì đường thẳng đi qua I và vuông góc với PM luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho biếy ab = cd. Đơn giải biểu thức:

$$P = \frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2} \text{ với } a + b + c + d \neq 0.$$

Lời giải

Bài 1. Đáp số $x_1 = 7$, $x_2 = -13$

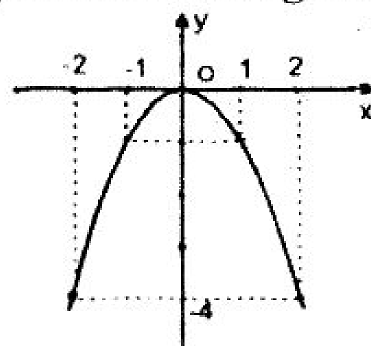
2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 27 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 28 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

3) Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

* Với x > 0 hàm số nghịch biến, x<0 hàm số đồng biến.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-4	-1	0	-1	-4	...



* Bảng giá trị

* Đồ thị như hình vẽ bên.

Bài 2. Gọi độ dài quãng đường AB là x km (x > 60), nếu đi với vận tốc 40 km/h thì để đến

B, ô tô phải đi trong $\frac{x}{40}$ giờ.

Khi còn 60 km nữa thì được nửa quãng đường AB, người lái xe tăng vận tốc 10 km/h trên quãng đường còn lại, như vậy độ dài quãng đường đầu mà xe đi với vận tốc 40 km/h là $\left(\frac{x}{2} - 60\right)$km và độ dài quãng đường sau xe đi với vận tốc 50 km/h là $\left(\frac{x}{2} + 60\right)$km. Vậy thời gian xe đã đi trên quãng đường đầu là $\frac{\frac{x}{2} - 60}{40}$h và trên quãng đường sau là $\frac{\frac{x}{2} + 60}{50}$h.

Do tăng vận tốc mà xe đến sớm 1 giờ, ta có phương trình:

$$\frac{\frac{x}{2} - 60}{40} + \frac{\frac{x}{2} + 60}{50} + 1 = \frac{x}{40}$$

$25x - 3000 + 20x + 2400 + 2000 = 50x$

$1400 = 5x$

$x = 280$

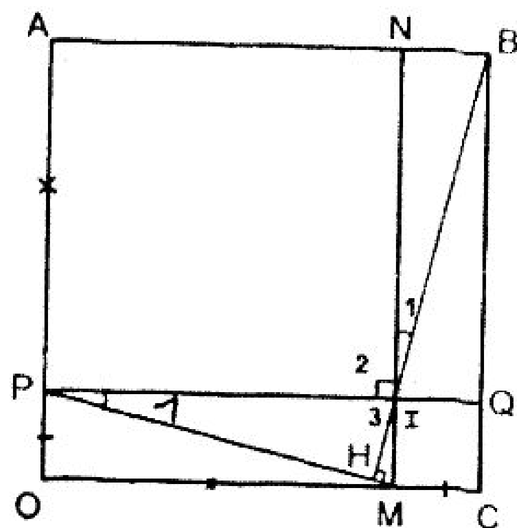
$x = 280 \Rightarrow x > 60$, thoả mãn điều kiện bài toán.

Thử lại: $\frac{\frac{x}{2} - 60}{40} + \frac{\frac{x}{2} + 60}{50} + 1 = 2 + 4 + 1 = 7$

$\frac{x}{40} = \frac{280}{40} = 7.$

Trả lời: Độ dài quãng đường AB là 280 km.

Bài 3. Hình 38



H.38

1) Theo giả thiết, có $\widehat{A} = 1v$, AP // NI và AN // PI nên APIN là hình chữ nhật.

Mặt khác, do AP = OM và OM = PI (đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song), nên AP = PI do đó hình chữ nhật APIN là hình vuông.

2) $\Delta IPM = \Delta NBI$ (c.g.c).

3) Kéo dài BI cắt PM tại H.

Biết $\widehat{I_1} + \widehat{I_2} + \widehat{I_3} = 2v$, mà $\widehat{I_2} = 1v$ nên $\widehat{I_1} + \widehat{I_3} = 1v$. Do $\Delta IPM = \Delta NBI$ nên $\widehat{P_1} = \widehat{I_1}$, do đó $\widehat{P_1} + \widehat{I_3} = 1v$. Trong tam giác PIH có $\widehat{P_1} + \widehat{I_3} = 1v$ suy ra $\widehat{PHI} = 1v$ hay HI ⊥ PM.

Vậy đường thẳng đi qua I và vuông góc với PM luôn đi qua điểm cố định B.

Bài 4. Đơn giản biểu thức

$$P = \frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}$$

$$= \frac{(a^2+ac+ad+cd)(b^2+bd+bc+cd)}{(a+b+c+d)^2} \text{ (vì ab = cd)}$$

$$= \frac{(a^2+ac+ad+ab)(b^2+bd+bc+ab)}{(a+b+c+d)^2}$$

$$= \frac{a(a+c+d+b)b(b+d+c+a)}{(a+b+c+d)^2}$$

$$= \frac{(a+c+d+b)^2.ab}{(a+b+c+d)^2} = ab \text{ (vì } a + b + c + d \neq 0)$$

Đề 31

Bài 1. 1) Rút gọn (loại bỏ dấu căn và dấu giá trị tuyệt đối):

$\sqrt{a^2 - 6a + 9}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{x+5} = 1 - x$.

Bài 2. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34m, nếu tăng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m thì diện tích tăng thêm $45m^2$. Hãy tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R).

1) Tính theo R độ dài cạnh và chiều cao của tam giác ABC.

2) Gọi M là điểm di chuyển trên cung nhỏ BC (M khác B và C), trên tia đối của tia BM lấy MD = MC; chứng tỏ tam giác MCD đều.

3) Suy ra rằng: khi M di chuyển trên cung nhỏ BC thì D di chuyển trên một phần của đường tròn cố định mà ta cần định rõ tâm và các vị trí giới hạn.

4) Hãy chỉ ra vị trí của M sao cho MA + MB + MC lớn nhất và chứng minh điều đó.

Lời giải

Bài 1. 1. Rút gọn:

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a-3)^2} = |a - 3| = \begin{cases} a - 3 \text{ khi } a \geq 3 \\ 3 - a \text{ khi } a < 3. \end{cases}$$

2. Giải phương trình:

$$\sqrt{x+5} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x + 5 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq x \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq x \\ x = -1 \text{ hay } x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Bài 2. Gọi chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là xm, ym ($0 < x, y < 17$; 17 là nửa chu vi mảnh vườn), do đó có phương trình (1):

$x + y = 17$ (1)

Nếu tăng thêm chiều dài 3m và tăng thêm chiều rộng 2m thì chiều dài, chiều rộng sẽ là $(x + 3)$m, $(y + 2)$m. Khi đó diện tích mảnh vườn tăng thêm $45m^2$, biết rằng diện tích mảnh vườn khi chưa tăng thêm các cạnh là $xy(m^2)$, có phương trình (2):

$(x + 3)(y + 2) - xy = 45$ (2)

Vậy có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 17 & (1) \\ (x+3)(y+2) - xy = 45 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ được $x = 12$; $y = 5$.

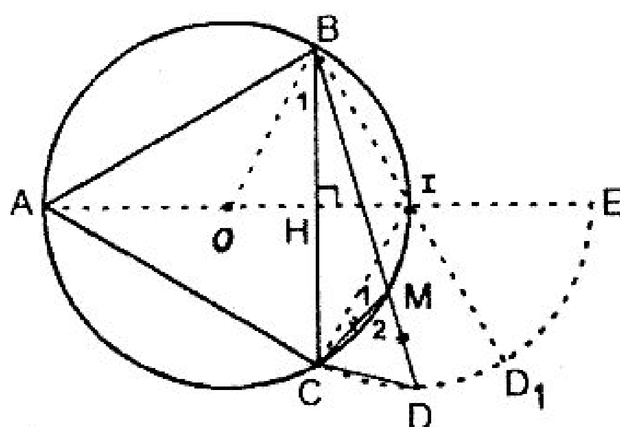
Thử lại: $(x + 3)(y + 2) - xy = (12 + 3)(5 + 2) - 12.5$

$= 15.7 - 6\text{-} = 45.$

Trả lời: Chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn là 12m; 5m.

Bài 3. Hình 39

1. OB là phân giác của $\hat{B}$ nên $\hat{B}_1 = 30^o$. Dựng $AH \perp BC$. Trong tam giác vuông OBH, cạnh OH đối diện góc 30^o nên $OH = \frac{R}{2}$, suy ra OH = OI. Như vậy BOCI là hình thoi, nên BI = OB = R.



H.39

Trong tam giác vuông ABI, theo định lí Pitago có:

$AI^2 = AB^2 + BI^2 \Rightarrow AB^2 = AI^2 - BI^2 = (2R)^2 - R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông ABH, theo Pitago có:

$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 =$

$$= \left(R\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{3R}{2}.$$

Cách khác. Biết $OH = \frac{R}{2}$

nên $AH = AO + OH = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$.

2. Tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn tâm O nên $\hat{A} + \widehat{M_1} = 180^o$, biết $\hat{A} = 60^o \Rightarrow \widehat{M_1} = 120^o$, nên $\widehat{M_2} = 60^o$.

Tam giác MCD có MC = MD (gt) và $\widehat{M_2} = 60^o$ nên là tam giác đều.

3. Tam giác MCD đều nên $\widehat{D} = 60^\circ$. Điểm D nhìn đoạn BC cố định nên khi M di chuyển trên cung nhỏ BC thì D di chuyển trên cung chứa góc 60° dựng trên BC. Dễ dàng thấy rằng tâm của cung chứa góc 60° kể trên là trung điểm I của $\overset{\frown}{BC}$.

Khi $M \equiv C$ thì $D \equiv M \equiv C$, còn khi $M \equiv B$ thì BM trở thành tiếp tuyến của đường tròn tâm O, do đó vị trí giới hạn của D là cung CDE.

Đảo lại, nếu lấy điểm D_1 thuộc $\overset{\frown}{CDE}$ của đường tròn tâm I thì có $MD_1 = MC$ (vì $M \equiv I$).

4. Theo giả thiết thì MD = MC nên MB + MC = BD; mà BD là một dây cung của đường tròn tâm I, nên BD là lớn nhất khi BD là đường kính của đường tròn tâm I khi đó $M \equiv I$.

Tương tự có MA là lớn nhất khi MA là đường kính của đường tròn tâm O khi đó $M \equiv I$.

Vậy MA + MB + MC = MA + BD lớn nhất khi $M \equiv I$.

Đề 32

Bài 1. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x}\right) \cdot \frac{x^2-36}{12x^2+12} \text{ với } x \neq 0;\ x \neq -6;\ x \neq 6.$$

1) Rút gọn biểu thức A;

2) Tính giá trị của biểu thức A với $x = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

Bài 2. 1) Giải các phương trình:

a) $x - \frac{15}{x} = 2$; b) $\sqrt{x+5} - 2 = 0$

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị của m để $10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Vẽ đồ thị hàm số $y = -0,5x^2$. Trên đồ thị hàm số y lấy hai điểm A và B có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Hãy viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 4. Một điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB. Gọi H, I lần lượt là hai điểm chính giữa các cung AM, MB; gọi Q là trung điểm của dây MB, và K là giao điểm của AM, HI;

1) Tính độ lớn góc HKM.

2) Vẽ đường cao IP của tam giác, chứng minh IP tiếp xúc với đường tròn tâm (O).

3) Dựng hình bình hành APQR. Tìm tập hợp điểm R khi M di động trên nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB.

Lời giải

Bài 1. 1) Rút gọn biểu thức:

Với $x \neq 0$; $x \neq \pm 6$ thì $A = \frac{1}{x}$

2) Tính giá trị của A

$$A = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5+4\sqrt{5}+4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}} = \frac{1}{\left|\sqrt{5}+2\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}+2}.$$

Bài 2. 1)

a) Điều kiện $x \neq 0$, biến đổi phương trình đã cho được $x^2 - 2x - 15 = 0$. Giải phương trình được $x = -3$; $x = 5$.

b) Điều kiện $x \geq -5$, biến đổi phương trình đã cho được $x + 5 = 4$. Giải ra được nghiệm $x = -1$.

2) Theo định lí Viét, có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m + 1)$;

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = 2m + 10.$$

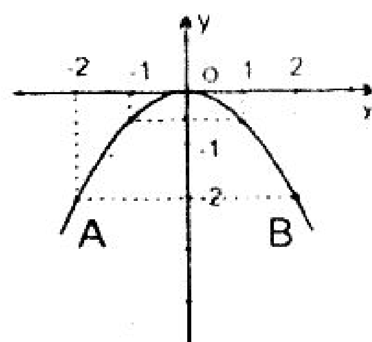
$$A = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 8x_1x_2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2 = [2(m + 1)]^2 + 8(2m + 10)$$
$$= 4(m + 1)^2 + 16m + 80 = 4m^2 + 8m + 4 + 16m + 80$$
$$= 4m^2 + 24m + 36 = 48 = 4(m + 3)^2 + 48 \geq 48.$$

$A = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 48 khi $m + 3 = 0$ hay $m = -3$.

Bài 3. Hàm số xác định với mọi $x \in R$. Với $x < 0$ hàm số đồng biến và $x > 0$ hàm số nghịch biến.

Bảng giá trị

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	...



Với $x = -1 \Rightarrow y = -0,5x^2 = -\frac{1}{2}$, nên $A(-1; -\frac{1}{2})$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = -0,5x^2 = -2$, nên $B(2 ; -2)$.

Phương trình đường thẳng có dạng y = ax + b và đi qua A, B nên có: $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} = -a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases}$

Giải hệ được $a = -\dfrac{1}{2}$ và b = -1. Vậy phương trình đường thẳng AB phải tìm có dạng $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$.

Bài 4. Hình 40

1) Vì $\overset{\frown}{HA} = \overset{\frown}{HM}$ và $\overset{\frown}{IM} = \overset{\frown}{IB}$ nên $\overset{\frown}{HA} + \overset{\frown}{MI}$ bằng $\dfrac{1}{4}$ đường tròn có số đo bằng 90° nên $\widehat{HKA} = 45°$, suy ra $\widehat{HKM} = 135°$.

2) Vì $\overset{\frown}{IM} = \overset{\frown}{IB}$ nên đường kính IO vuông góc với BM tại chính trung điểm Q của MB. Tứ giác PMQI có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật suy ra $\widehat{OIP} = 1v$ hay OI ⊥ PI tức là PI là tiếp tuyến của đường tròn tâm (O).

H.40

3) Vì PMQI là hình chữ nhật nên $\widehat{MPQ} = \widehat{MIQ}$ (1), và APQR là hình bình hành nên $\widehat{MPQ} + \widehat{PAR} = 2v$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MIQ} = \widehat{MAR} = 2v$, do đó tứ giác AMIR nội tiếp được đường tròn.

Qua ba điểm không thẳng hàng A, M, I chỉ dựng được

một đường tròn duy nhất, biết A, M, I nằm trên nửa đường tròn đường kính AB, nên R cũng phải nằm trên đường tròn đường kính AB này (R thuộc nửa đường tròn không chứa M).

Đảo lại, nếu lấy R' bất kì thuộc nửa đường tròn đường kính AB không chứa M. Dựng đường kính R'OI'. Từ B dựng BM' ⊥ OI', BM' cắt OI' tại Q'. Hạ I'P' ⊥ AM'. Dễ dàng chứng minh được AP'Q'R' là hình bình hành.

Vậy tập hợp điểm R khi M di động trên nửa đường tròn đường kính AB đã cho là nửa đường tròn đường kính AB không chứa điểm M.

Đề 33

Bài 1. Cho biểu thức sau với x, y dương:

$$A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3}}$$

a) Rút gọn A

b) Cho xy = 16. Xác định x, y để A có giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. Cho hàm số $y = 2x^2 - 6x - m + 1$ (*) (với m là tham số).

a) Khi m = 9 tìm x để y = 0.

b) Tìm m để đường thẳng y = x + 1 cắt đồ thị của (*) tại 2 điểm phân biệt và tìm toạ độ trung điểm của đoạn thẳng với giao điểm đó.

Bài 3. Dân số xã X hiện nay có 10000 người. Người ta dự đoán sau 2 năm dân số xã X là 10 404 người. Hỏi trung bình hàng năm dân số xã X tăng bao nhiêu phần trăm?

Bài 4. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn ($AB \neq AC$) và nội tiếp trong đường tròn tâm O; H là giao điểm các đường cao AM, BN, CP; Q là điểm đối xứng của H qua trung điểm đoạn BC.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{PNB} = \widehat{BNM} = \widehat{CBQ}$.

b) Chứng minh Q nằm trên đường tròn tâm O

c) Từ A kẻ Ax // NP, đường thẳng Ax cắt đường thẳng BC ở K. Chứng minh Ax là tiếp tuyến của đường tròn tâm O và $AK^2 = KB.KC$

d) Gọi I là điểm đối xứng của O qua BC. Chứng minh rằng: AO = HI.

Lời giải

Bài 1. a) $A = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{xy}$

b) Ta có $A = \dfrac{1}{16}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq \dfrac{1}{16}\sqrt[4]{xy} = \dfrac{1}{16} \cdot 2.2 = \dfrac{1}{4}$ (vì xy = 16). Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y = 4$. Vậy A nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{4}$ (khi x = y = 4).

Bài 2. a) Khi m = 9 thì hàm số đã cho có dạng

$$y = 2x^2 - 6x - 8$$

Với y = 0 có phương trình:

$2x^2 - 6x - 8 = 0$ hay $x^2 - 3x - 4 = 0$

Giải phương trình được $x_1 = 4$; $x_2 = -1$.

b) Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị của (*) tại hai điểm phân biệt khi hệ phương trình

$\begin{cases} y = 2x^2 - 6x - m + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$, có hai nghiệm phân biệt.

Từ hệ phương trình trên, có:

$2x^2 - 6x - m + 1 = x + 1$ hay $2x^2 - 7x - m = 0$ (1)

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi

$\Delta = 49 + 8m > 0 \Rightarrow m > -\frac{49}{8} = -6\frac{1}{8}$.

Gọi toạ độ hai giao điểm (của đường $y = x + 1$ và đường $y = 2x^2 - 6x - m + 1$) là $(x_1; y_1)$ và (x_2, y_2). Thì toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng nối 2 giao điểm đó là $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$ và

$b = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + 1 + x_2 + 1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} + 1 = a + 1$.

Trong đó x_1 và x_2 là 2 nghiệm của (1). Theo Viét ta có $x_1 + x_2 = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{4}, b = \frac{11}{4} (\forall m > -6\frac{1}{8})$.

Bài 3. Gọi tỉ số phần trăm tăng dân số hàng năm của xã X hàng năm là $\frac{x}{100} (x > 0)$.

Dân số xã X hiện nay có 10 000 người thì sau 1 năm dân số sẽ là:

$10\,000 + \frac{x}{100} \cdot 10\,000 = 10\,000 + 100x$ (người)

Sang năm thứ hai, dân số xã X sẽ là:

$$10\,000 + 100x + \frac{x}{100}\cdot(10\,000 + 100x)$$

$$= 10\,000 + 100x + 100x + x^2$$

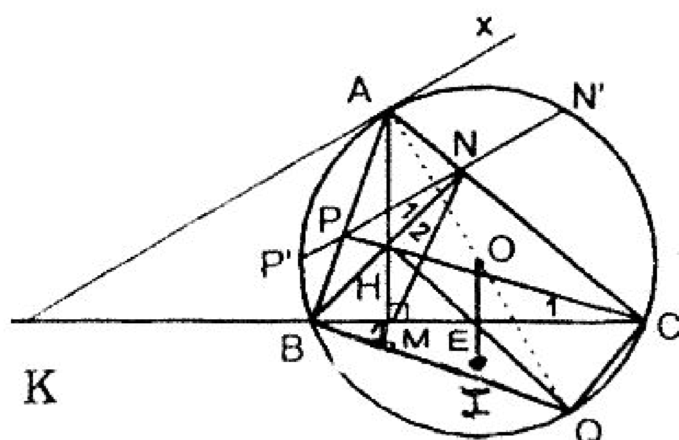
$$= 10\,000 + 200x + x^2 \text{ (người)}$$

Sau 2 năm dân số xã X là 10404 người, nên có phương trình:

$10\,000 + 200x + x^2 = 10\,404$ hay $x^2 + 200x - 404 = 0$.

Giải phương trình được $x_1 = 2$; $x_2 = -202$ (loại). Sau khi thử lại, có kết quả: Dân số xã X hàng năm tăng 2%.

Bài 4. Hình 41



H.41

a) Chứng minh ◊HPAN nội tiếp được đường tròn, suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{N_1}$. Tương tự ◊HMCN nội tiếp được nên $\widehat{C_1} = \widehat{N_2}$.

◊BHCQ là hình bình hành, suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$. Nhưng $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Từ đó suy ra $\widehat{N_1} = \widehat{N_2} = \widehat{B_1}$ hay $\widehat{BNP} = \widehat{BNM} = \widehat{CBQ}$.

b) Do BHCQ là hình bình hành nên $\widehat{BQC} = \widehat{BHC} = \widehat{PHN}$ (góc đối đỉnh). Biết $\widehat{PHN} + \widehat{PAN} =$ 2v, từ đó suy ra $\widehat{PAN} + \widehat{BQC} =$ 2v hay ◊ABQC nội tiếp được đường tròn vậy Q nằm trên đường tròn tâm O.

c) Ax // PN hay Ax // P'N' $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AP'} = \overset{\frown}{AN'}$, tức là A là

điểm chính giữa của $\overparen{P'N'}$, do đó OA ⊥ P'N' (tính chất đối xứng của đường tròn).

Ax // P'N', OA ⊥ P'N' ⇒ OA ⊥ Ax, hay Ax là tiếp tuyến của đường tròn O tại A.

ΔAKC ∽ ΔBKA vì có $\widehat{K}$ chung, $\widehat{ACK} = \widehat{BAK}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{AB}$) suy ra:

$\frac{AK}{BK} = \frac{KC}{KA}$ hay $AK^2 = KB.KC$

d) Tam giác AHQ có OA = OQ, EH = EQ nên OE = $\frac{AH}{2}$ và OE // AH.

Vì I đối xứng với O qua BC nên OI = AH.

◊AHIO có OI // AH, OI = AH, nó là hình bình hành, suy ra AO = HI.

Đề 34

Bài 1. Cho biểu thức

$$M = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}\right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1\right)$$

a) Rút gọn M

b) Tìm x để $M < -\frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của M

Bài 2. Một bể đựng nước có hai vòi: vòi A đưa nước vào và vòi B tháo nước ra. Với vòi A khi trong bể không có nước tới khi bể đầy (có đóng vòi B) chảy lâu hơn 2 giờ so với vòi

B tháo nước ra từ khi bể đầy nước đến khi bể hết nước (có đóng vòi A). Khi bể nước chứa $\frac{1}{3}$ bể người ta đã mở cùng một lúc cả vòi A và vòi B thì sau 8 giờ bể cạn hết nước. Hỏi sau bao nhiêu giờ riêng vòi A có thể chảy đầy bể? Hỏi sau bao nhiêu lâu riêng vòi B có thể tháo hết nước trong bể?

Bài 3. Cho đường tròn (O; r) và dây cung AB (AB < 2r). Trên tia AB lấy điểm C sao cho AC > AB. Từ C kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tại P, K. Gọi I là trung điểm AB.

a) Chứng minh tứ giác CPIK nội tiếo được đường tròn.

b) Chứng minh hai tam giác ACP và PCB là đồng dạng. Từ đó suy ra $CP^2 = CA.CB$.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác CPK. Hãy tính PH theo r.

d) Giả sử PA // CK, chứng minh tia đối của tia BK là phân giác của góc CBP.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{3}{8} \ (1) \\ p + q = 12 \ (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} p^2 - 2p + q^2 = 0 \ (1) \\ p^2 - 2pq + 1 = 0 \ (2) \end{cases}$

Lời giải

Bài 1. a) Điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 9$. $P = \dfrac{-3}{\sqrt{x} + 3}$.

$P < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x} + 3} < \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow 6 > \sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3$

$\Leftrightarrow 0 \leq x < 9$.

Vậy với $0 \le x < 9$ thì $P < -\frac{1}{2}$.

c) Do $P < 0$ nên P nhỏ nhất khi $\frac{-3}{\sqrt{x}+3}$ lớn nhất, do đó

$P_{min} = -1$ khi $x = 0$.

Vậy khi $x = 0$ thì P có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Bài 2. Gọi x là thời gian mà vòi A chảy một mình làm đầy bể thì trong 1 giờ vòi A chảy được $\frac{1}{x}$ bể.

Thời gian vòi A làm đầy bể lâu hơn thời gian vòi B tháo hết nước ra là 2 giờ nên thời gian để vòi B tháo hết nước ra là $(x - 2)$ giờ, do đó trong một giờ vòi B tháo nước ra được $\frac{1}{x-2}$ bể.

Trong 8 giờ vòi A chảy vào được $\frac{8}{x}$ bể, cũng trong 8 giờ vòi B tháo nước ra được $\frac{8}{x-2}$ bể.

Trong bể đã có lượng nước là $\frac{1}{3}$ bể, nên sau 8 giờ cho mở vòi A thì lượng nước có trong bể là $\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{3}\right)$ bể, lượng nước này đúng bằng lượng nước vòi B chảy tháo ra trong 8 giờ, do đó có phương trình:

$$\frac{8}{x}+\frac{1}{3}=\frac{8}{x-2}.$$

Biến đổi được phương trình $x^2 - 2x - 48 = 0$

Giải phương trình có $x_1 = 8$, $x_2 = -6$ (loại).

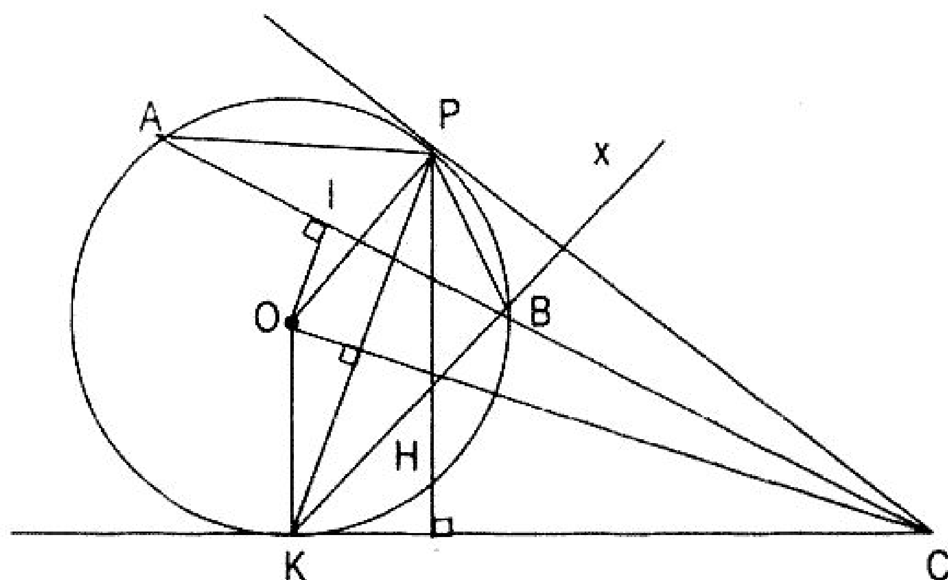
Sau khi thử lại, có kết quả: Vòi A chảy riêng làm đầy

bể sau 8 giờ, vòi B chảy riêng tháo hết nước ra khi bể có đầy nước sau 6 giờ.

Bài 3. Hình 42

a) Vì CP, CK là tiếp tuyến của đường tròn, nên $\widehat{OPC} = \widehat{OKC} = 1v$. Vì IA = IB (theo gt) nên OI ⊥ AB (theo tính chất đối xứng của đường tròn) nên $\widehat{OIC} = 1v$.

Ta thấy I, P, K cùng nhìn OC dưới cùng một góc vuông nên I, P, K phải cùng nằm trên một đường tròn đường kính OC (theo quỹ tích cung chứa góc), vậy CPIK nội tiếp được đường tròn.



H.42

b) Ta có $\widehat{PAB} = \widehat{CPB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PB}$). Xét hai tam giác ACP và PCB ta có $\hat{C}$ chung và $\widehat{PAB} = \widehat{CPB}$ nên ΔACP ∽ ΔPCB (g.g), suy ra $\frac{CP}{CB} = \frac{CA}{CP}$ hay $CP^2 = CA.CB$.

c) Vì H là trực tâm của ΔCPK nên PH ⊥ KC, OK ⊥ KC (vì CK là tiếp tuyến) do đó PH // OK. Chứng minh tương tự có KH // OP.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ

một điểm đến đường tròn thì CO là phân giác của ΔPCK cân suy ra $OC \perp KP$ hay $OH \perp KP$.

Tứ giác OKHP có PH // OK, KH // OP và $OH \perp KP$ nên nó là hình thoi, suy ra $PH = OP = r$.

d) Ta có $\widehat{BKC} = \widehat{BPK}$ (cùng chắn cung BK)

Vì PA // KC nên $\widehat{BCK} = \widehat{PAB}$, mặt khác $\widehat{PAB} = \widehat{PKB}$ (cùng chắn cung PB) nên $\widehat{BCK} = \widehat{PKB}$.

Hai tam giác BPK và BKC có hai cặp góc bằng nhau thì cặp góc thứ ba phải bằng nhau, tức là $\widehat{PBK} = \widehat{CBK}$.

Ta có $\widehat{PBK} + \widehat{PBx} = \widehat{CBK} + \widehat{CBx} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{PBx} = \widehat{CBx}$ tức là Bx là phân giác của $\widehat{CBP}$.

Bài 4. a) Hệ đã cho viết thành $\begin{cases} \dfrac{p+q}{pq} = \dfrac{3}{8} & (1) \\ p+q = 12 & (2) \end{cases}$.

Thay (2) vào (1) có $\dfrac{12}{pq} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow pq = \dfrac{8.12}{3} = 32$.

Như vậy là biết tổng S = 12 và tích S = 32 nên p, q là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 12X + 32 = 0$

Giải ra được $X_1 = 8$; $X_2 = 4$.

Do p và q có vai trò như nhau nên hệ đã cho có nghiệm là $(p_1 = 8; q_1 = 4)$; $(p_2 = 4; q_2 = 8)$

b) Cộng từng vế hai phương trình đã cho, được:

$p^2 - 2p + 1 + p^2 - 2pq + q^2 = 0$ hay $(p - 1)^2 + (p - q)^2 = 0$. Do $(p - 1)^2 \geq 0$ và $(p - q)^2 \geq 0$ với mọi p, q nên tổng $(p - 1)^2 + (p - q)^2 \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $p = q = 1$. Vậy hệ đã cho có nghiệm là $p = q = 1$.

Đề 35

Bài 1. Cho biểu thức

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1}\right)$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của a sao cho $P > 1$

c) Tính giá trị của P biết $a = 19 - 8\sqrt{3}$

Bài 2. Hai xe ô tô cùng khởi hành từ A để đến B. Xe thứ nhất chạy với vận tốc 40km/h. Vận tốc xe thứ hai bằng 1,25 lần vận tốc xe thứ nhất. Nửa giờ sau cũng từ A một xe thứ ba đi về B. Xe này đuổi kịp xe thứ nhất và sau đó 1 giờ 30 phút nó đuổi kịp xe thứ hai. Tính vận tốc xe thứ ba.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, CE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F, G. Chứng minh:

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD

b) Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp được

c) AC song song với FG.

d) Các đường thẳng AC, DE, BF đồng quy.

*Bài 4.*Tìm giá trị:

a) Nhỏ nhất của biểu thức $A = k - \sqrt{k - 2000}$

b) Lớn nhất của biểu thức $B = \dfrac{3}{4m^2 - 4m + 5}$.

Lời giải

Bài 1. a) Điều kiện a ≥ 0 và a ≠ 1; $P = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$.

b) $P > 1 \Leftrightarrow \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{a+2}{\sqrt{a}-1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} - 1 > 0$

(vì a + 2 > 0) ⇔ a > 1 (thoả mãn điều kiện).

Vậy với a > 1 thì P > 1.

c) $A = 19 - 8\sqrt{3} = (4 - \sqrt{3})^2$.

Ta có $P = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = \frac{19-8\sqrt{3}+4-\sqrt{3}+1}{4-\sqrt{3}-1} = \frac{15-\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2. Vận tốc xe thứ hai bằng $1{,}25 = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ vận tốc xe thứ nhất nên vận tốc xe thứ hai là $40 \cdot \frac{5}{4} = 50$ (km/h).

Gọi vận tốc của xe thứ ba là x km/h (x > 50).

Nếu thời gian xe thứ ba đuổi kịp xe thứ nhất tại C là a giờ thì đoạn AC do xe thứ ba đi được là ax km, đoạn AC cũng là đoạn đường xe thứ nhất đã đi đến khi xe thứ ba đuổi kịp xe thứ nhất do đó đoạn AC dài là 40(a + 0,5) km, nên có phương trình:

ax = 40 (a + 0,5), từ đó $a = \frac{20}{x-40}$ (h).

Lập luận tương tự như trên thì có thời gian xe thứ ba đuổi kịp xe thứ hai là $\frac{25}{x-50}$ (h).

Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{25}{x-50} - \frac{20}{x-40} = \frac{3}{2}$$

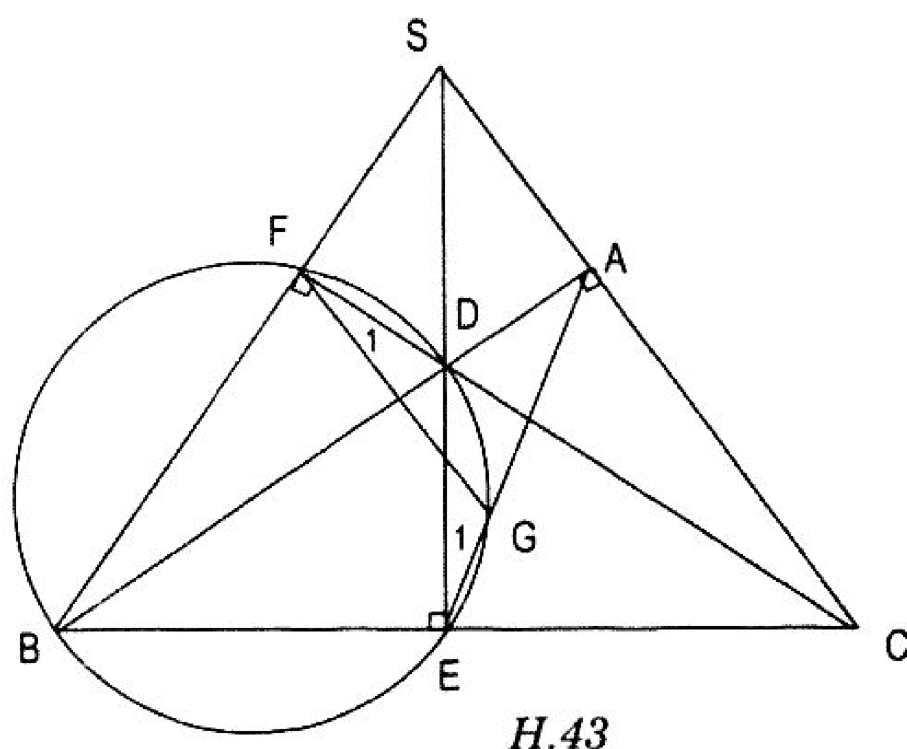
Giải phương trình được $x_1 = 60$; $x_2 = \frac{100}{3}$ (loại)

Sau khi thử lại, có kết quả: Vận tốc của xe thứ ba là 60 km/h.

Bài 3. Hình43.

a) Ta có $\widehat{BED} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Hai tam giác vuông ABC và EBD có chung góc nhọn B nên chúng đồng dạng với nhau.



H.43

b) Ta có $\widehat{DEC} + \widehat{DAC} = 2v$ nên tứ giác ADEC nội tiếp được đường tròn đường kính DC.

Ta có $\widehat{BFC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Như vậy là F và A cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên F và A phải nằm trên đường tròn đường kính BC (theo quỹ tích cung chứa góc), vậy tứ giác AFBC nội tiếp được đường tròn.

c) Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp chắn cung DA của đường

tròn đường kính DC), $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DG của đường tròn đường kính BD), do đó $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$.

Hai góc F_1, C_1 bằng nhau, ở vị trí so le trong nên AC // FG.

d) Trong ΔDBC ta có $DE \perp BC$, $CA \perp BD$ và $BF \perp DC$ như vậy DE, CA, BF là ba đường cao, chúng phải đồng quy tại S.

Bài 4. a) Điều kiện để A có nghĩa là $k - 2000 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{k - 2000} = x \geq 0$

Ta có $k - 2000 = x^2$ hay $k = x^2 + 2000$.

Vậy $B = k - x$ hay $b = x^2 - x + 2000 \Rightarrow x^2 - x + 2000 - B = 0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi $\Delta \geq 0$ tức là $1 - 4.2000 + 4B \geq 0$ hay $B \geq 1999\frac{3}{4}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của B là $1999\frac{3}{4}$ đạt được khi phương trình (*) có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$ ứng với $k = \frac{1}{4} + 2000 = 2000\frac{1}{4}$.

b) Ta có $C = \frac{3}{4m^2 - 4m + 5} = \frac{3}{(2m-1)^2 + 4}$

Vì $(2m - 1)^2 + 4 \geq 4$ nên $\frac{3}{(2m-1)^2 + 4} \leq \frac{3}{4}$, do đó giá trị lớn nhất của C là $\frac{3}{4}$ khi $2m - 1 = 0$ hay $m = \frac{1}{2}$.

PHẦN THỨ HAI

PHỤ LỤC
CÁC ĐỀ TOÁN TỰ KIỂM TRA

I - ĐỀ TOÁN THI VÀO LỚP 10

Đề 1

Bài 1. (2,5 điểm). Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$$

a) Rút gọn A;

b) Tìm giá trị của a để $A > \frac{1}{6}$.

Bài 2. (2,5 điểm). Cho phương trình

$x^2 - 2(m + 2)x + m + 1 = 0$ (x là ẩn)

a) Giải phương trình khi $m = -\frac{3}{2}$;

b) Tìm các giá trị của phương trình có hai nghiệm trái dấu;

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để: $x_1(1 - 2x_2) + x_2(1 - 2x_1) = m^2$.

Bài 3. (4 điểm). Cho tam giác ABC (AC > AB; $\widehat{BAC} > 90^0$). I, K theo thứ tự là các trung điểm của AB, AC. Các

đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E; tia CA cắt đường tròn I tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp được.

c) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.

d) Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH, DE.

Bài 4 (1 điểm). Xét các phương trình bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

$$cx^2 + bx + a = 0 \qquad (2).$$

Tìm hệ thức giữa a, b, c là điều kiện cần và đủ để hai phương trình trên có một nghiệm chung duy nhất.

Hà Nội, năm học 1995 - 1996

Lời giải

*Bài 1.*a) Điều kiện $a > 0$; $a \neq 0$; $a \neq 1$; $a \neq 4$.

$$A = \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}}$$

b) $A > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}} > \frac{1}{6}$, giải ra kết quả $a > 16$ (thoả mãn các điều kiện đã nêu; thử với $16 < a = 25$ thì $A > \frac{1}{6}$).

*Bài 2.*a) Thay $m = -\frac{3}{2}$, rồi biến đổi phương trình đã

cho có dạng: $2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Vì $\Delta' = 3$ nên $x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi $ac < 0$ tức là $m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$.

c) Tìm giá trị m của phương trình đã cho để có:

$x_1(1 - 2x_2) + x_2(1 - 2x_1) = m^2$

$\Leftrightarrow x_1 - 2x_1x_2 + x_2 - 2x_1x_2 = m_2$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) - 4(x_1x_2) = m^2$ (1).

Theo Viét thì $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m + 2)$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a} = m + 1$

nên (1) có dạng:

$2(m + 2) - 4(m + 1) = m^2 \Leftrightarrow 2m + 4 - 4m - 4 = m^2$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m(m + 2) = 0 \Rightarrow m = 0; m = -2$.

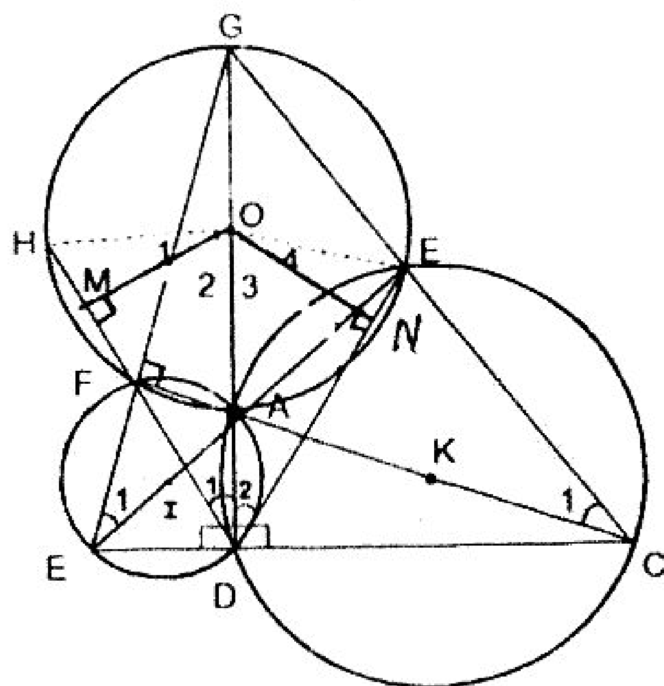
Vậy với $m = 0$; $m = -2$ thì $\Delta > 0$, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2.

Bài 3. Hình 44

a) Do AB là đường kính của đường tròn tâm I nên $\widehat{BDA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm I), tương tự có $\widehat{ADC} = 90^\circ$.

Vậy $\widehat{BDA} + \widehat{ADC} = 180^\circ$, suy ra B, D, C thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{BFC} = 90^\circ$



H.44

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính tâm I), tương tự có $\widehat{CEB} = 90^{\circ}$; như vậy F và E cùng nhìn BC dưới góc 90° nên B, F, E, C phải cùng nằm trên một đường tròn (quỹ tích cung chứa góc) suy ra tứ giác BFEC nội tiếp được đường tròn.

c) Kéo dài BF, CE, chúng cắt nhau tại G. Trong ΔBGC có hai đường cao BE và CF cắt nhau tại A nên $AG \perp BC$ (theo tính chất đồng quy của các đường cao trong một tam giác).

Mặt khác ta có $\widehat{BDA} = 90^{\circ}$ hay $AD \perp BC$. Từ điểm A ở ngoài đường thẳng BC chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với BC mà thôi, do đó $AG \equiv AD$, nên $GD \perp BC$. Vậy AD, BE, CF đồng quy tại A.

d) Do $\widehat{BFC} = 90^{\circ}$ và $\widehat{CEB} = 90^{\circ}$ suy ra $\widehat{AFG} = \widehat{AEG} = 90^{\circ}$, do đó tứ giác AHGE nội tiếp được đường tròn tâm O (với O là trung điểm của AG), đó cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔAEF.

$\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn tâm I),

$\widehat{C_1} = \widehat{D_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$ của đường tròn tâm K),

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), do đó có $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$.

Từ O hạ $OM \perp DH$ và $ON \perp DE$, suy ra $\Delta OMD = \Delta OND$ do đó có $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$; $\Delta OMH = \Delta ONE$ do đó có $\widehat{O_1} = \widehat{O_4}$. Vậy $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{O_3} + \widehat{O_4}$ hay $\widehat{HOD} = \widehat{EOD}$.

$\Delta HOD = \Delta EOD$ (g.c.g) nên DH = DE.

Bài 4. Giả sử x_0 là nghiệm chung duy nhất, thay $x = x_0$

vào hai phương trình đã cho rồi trừ vế với vế được:

$(a - c)(x_0^2 - 1) = 0$.

Với $a \neq c$ thì $a \pm b + c = 0 \Rightarrow |b| = |a + c|$.

Với $a = c$ thì hai phương trình đồng nhất và có nghiệm kép, tức là $b^2 = 4ac = 4a^2$; $|b| = |2a| = |a + c|$.

Đảo lại, với $|b| = |a + c|$ thì hai phương trình có nghiệm chung duy nhất. Vậy điều kiện cần tìm là $|b| = |a + c|$.

Đề 2

Bài 1.(2 điểm). 1) Tính: $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{x-4} = 4 - x$.

Bài 2.(2 điểm). Cho phương trình bậc hai có ẩn x:

$x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$

1) Chứng tỏ phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m;

2) Đặt $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2$

a) Chứng minh $A = 8m^2 - 18m + 9$

b) Tìm m sao cho A = 27

3) Tìm m sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai nghiệm kia.

Bài 3 (5 điểm). Cho hình vuông ABCD cố định, độ dài cạnh a; E là điểm di chuyển trên đoạn CD (E khác D), đường thẳng AE cắt BC tại F, đường thẳng vuông với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

1) Chứng minh hai tam giác ABF và ADK bằng nhau,

suy ra ΔAFK vuông cân.

2) Gọi I là trung điểm FK, chứng minh I là tâm của đường tròn qua A, C, F, K, và I chuyển động trên đường cố định khi E di động trên CD.

3) Tính số đo góc AIF, suy ra bốn điểm A, B, F, I cùng nằm trên một đường tròn.

4) Đặt DE = x ($a \ge x > 0$), tính độ dài các cạnh của ΔAEK theo a và x.

5) Hãy chỉ ra vị trí của E sao cho độ dài EK ngắn nhất và chứng minh điều ấy.

Thành phố Hồ Chí Minh, năm học 1995 - 1996.

Lời giải

1. 1) Tính: $\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{2}{2} = 1.$

2) Giải phương trình:

$$\sqrt{x-4} = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = (4-x)^2 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 16 - 8x + x^2 \\ 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 20 = 0 \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \\ x \le 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

2. 1) $\Delta' = m^2 - (2m - 1) = m^2 - 2m + 1$

$m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \ge 0 \Rightarrow \Delta' \ge 0$, vậy phương trình đã cho có nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

2) a) $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 9x_1x_2 =$

$= 2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 9x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2.$

Vì $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 1$, nên

$A = 2.(2m)^2 - 9(2m - 1) = 8m^2 - 18m + 9.$

b) $A = 27 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m + 9 = 27 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m - 18 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m - 9 = 0.$

$A_{(m)} = 81 + 4.49 = 81 + 144 = 225 = 15^2.$

$m_1 = \frac{9+15}{8} = 3;\ m_2 = \frac{9-15}{8} = -\frac{3}{4}.$

Vậy với $m = 3$; $m = -\frac{3}{4}$ thì $A = 27$.

3) Giả sử có $x_1 = 2x_2$. Biết $x_1 + x_2 = 2x_2 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m$ hay $3x_2 = 2m \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}m$, do đó $x_1 = \frac{4}{3}m$, nên $x_1x_2 = \frac{4}{3}m \cdot \frac{2}{3}m = \frac{8}{9}m^2$. Mặt khác, theo Viét $x_1x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 1$, nên:

$\frac{8}{9}m^2 = 2m - 1 \Leftrightarrow \frac{8}{9}m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m + 9 = 0$

$\Delta'_{(m)} = 81 - 72 = 9 = 3^2$, do đó

$m_1 = \frac{9+3}{8} = \frac{3}{2};\ m_2 = \frac{9-3}{8} = \frac{3}{4}.$

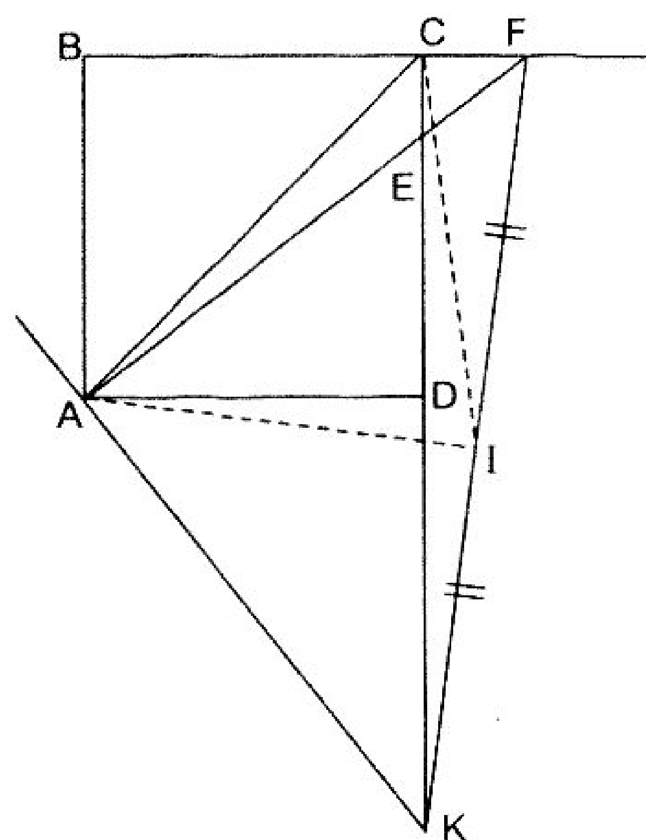
(Thử lại: Thay giá trị của m vào phương trình bậc hai đã cho có $x_1 = 2$; $x_2 = 1$).

3) Hình 45

1) $\Delta ABF = \Delta ADK$ vì có $\hat{B} = \hat{D} = 1v$, $AB = AD$, $\widehat{BAF} = \widehat{DAK}$ (vì cùng phụ với $\widehat{FAD}$), suy ra $AF = AK$.

ΔAFK có $\widehat{FAK} = 1v$ (vì $EA \perp AK$) và $AF = AK$ nên là tam giác vuông cân.

2) I là trung điểm của FK nên AI là trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông AFK suy ra IA = IF = IK. Tương tự CI là trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông CFK nên IC = IF = IK.



H.45

Như vậy, IF = IK = IA = IC, chứng tỏ rằng I là tâm của đường tròn đi qua A, C, F, K.

Điểm I có tính chất cách đều hai điểm cố định A, C của hình vuông ABCD đã cho, nên I phải nằm trên đường trung trực đoạn AC, chính là nằm trên BD.

Vậy khi E di động trên CD (E khác D) thì I chuyển động trên đường cố định BD.

3) Tam giác AFK là vuông cân có AI là trung tuyến nên AI cũng là đường cao, suy ra $\widehat{AIF} = 1v$.

Tứ giác ABFI có $\widehat{ABF} + \widehat{AIF} = 2v$, nó nội tiếp được đường tròn. Vậy bốn điểm A, B, F, I cùng nằm trên một đường tròn.

4) Tam giác vuông AEK có AD là đường cao, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, có:

$$AD^2 = DE.DK \Rightarrow DK = \frac{AD^2}{DE} = \frac{a^2}{x}.$$

$$EK = DE + DK = x + \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 + a^2}{x}$$

• $AE^2 = AD^2 + DE^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow AE = \sqrt{x^2 + a^2}$

• $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2} = \frac{a^2(x^2 + a^2)}{x^2}$

$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$.

5) Biết $EK = \frac{x^2 + a^2}{x}$ với $0 < x \le a$. Gọi $a = x + b$ $(b \ge 0)$ thì

$$EK = \frac{x^2 + (x + b)^2}{x} = \frac{x^2 + x^2 + 2bx + b^2}{x} = \frac{2x^2 + 2bx + b^2}{x}$$

$$= \frac{2x(x + b)}{x} + \frac{b^2}{x} = a + \frac{b^2}{x}.$$

Vậy EK nhỏ nhất khi $\frac{b^2}{x} = 0 \Leftrightarrow b = 0$, nghĩa là $x = a$

$\Leftrightarrow ED = CD$ hay $E \equiv C$.

Đề 3

•

Bài 1 (2 điểm). Tính:

a) $\sqrt{\left(\sqrt{5} + 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}$; b) $\frac{\sqrt{4m^2 - 4m + 1}}{4m - 2}$

Bài 2 (2 điểm). Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$. Tìm a và b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm (O ; -1) và tiếp xúc với (P).

Bài 3 (2 điểm). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + my = -3 & (1) \\ (1-m)x + y = 0 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$;

b) Tìm m để hệ có nghiệm $(x < 0; y < 0)$

Bài 4 (4 điểm). Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2r$. C là trung điểm của cung AB. Trên cung AC lấy điểm F bất kì. Trên BF lấy điểm E sao cho $BE = AF$.

a) Hai tam giác AFC và BEC quan hệ với nhau như thế nào? Tại sao?

b) Chứng minh EFC là tam giác vuông cân.

c) Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn. Chứng minh BECD là một tứ giác nội tiếp.

d) Giả sử F chuyển động trên cung AC. Chứng minh rằng khi đó E chuyển động trên một cung tròn.

Hãy xác định cung tròn và bán kính của cung tròn đó.

Hải Phòng, năm học 1995 - 1996

Lời giải

*Bài 1.*a) $\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = \sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1 = 2\sqrt{5}.$

b) $A = \dfrac{\sqrt{4m^2-4m+1}}{4m-2} = \dfrac{\sqrt{(2m-1)^2}}{2(2m-1)} = \dfrac{|2m-1|}{2(2m-1)}$

• Nếu $2m - 1 > 0$ hay $m > \dfrac{1}{2}$ thì $A = \dfrac{1}{2}$

• Nếu $2m - 1 = 0$ thì A không xác định

• Nếu 2m - 1 < 0 hay $m < \frac{1}{2}$ thì $A = -\frac{1}{2}$

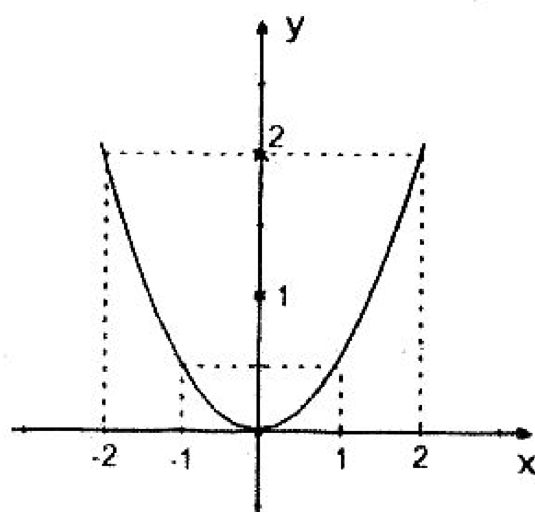
Bài 2. Hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Với x < 0 hàm số nghịch biến, với x > 0 hàm số đồng biến

Bảng giá trị

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	...

Đồ thị (P) như hình vẽ bên.

- Vì y = ax + b đi qua (0; -1) nên b = -1, và muốn cho y = ax - 1 tiếp xúc với (P) thì phương trình $\frac{x^2}{2} = ax - 1$ (1) phải có nghiệm kép.



(1) ⇔ $x^2 - 2ax + 2 = 0$

$\Delta' = a^2 - 2$; $\Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}$; $a_2 = -\sqrt{2}$.

Vậy các giá trị phải tìm là:

$(a = \sqrt{2}; b = -1)$, $(a = -\sqrt{2}; b = -1)$.

Bài 3. a) Với m = 2, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y = -3 & (1') \\ -x + y = 0 & (2') \end{cases}$$

Từ (2') có y = x, thay vào (1') được $x = -\frac{3}{4}$, suy ra $y = -\frac{3}{4}$.

Vậy với m = 2 hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $(x = y = -\frac{3}{4})$.

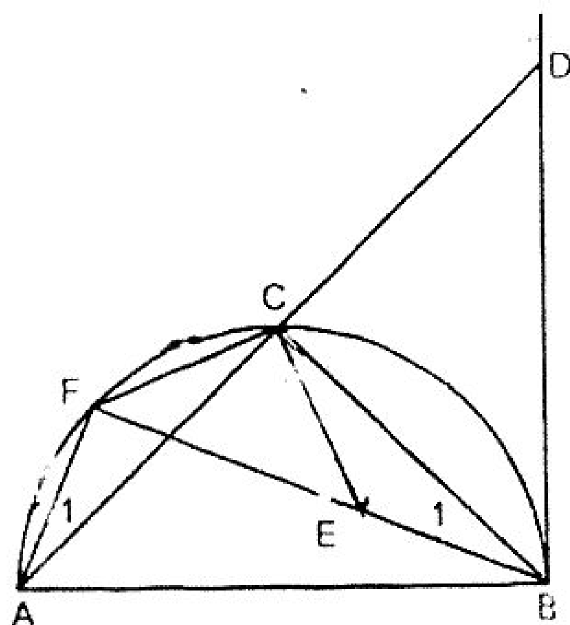
b) Từ (2) suy ra y = (m - 1)x (3), thay vào phương trình (1) rồi biến đổi, có: $m^2x = -3$.

Với m ≠ 0 ta có $x = -\frac{3}{m^2}$.

Vì x < 0 với mọi m ≠ 0 nên theo (3), muốn có y < 0 chỉ cần m - 1 > 0 hay > 1.

Vậy giá trị m phải tìm là m > 1.

Bài 4. Hình 46



H.46

a) Vì C là trung điểm của $\overset{\frown}{AB}$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \Rightarrow AC = CB$; $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FC}$), lại có AF = BE (theo giả thiết). Vậy ΔAFC = ΔBEC (c.g.c).

b) Theo kết quả câu a) có CE = CF nên ΔECF cân ở C.

Vì $\widehat{CFE} = 45^\circ$ (vì cung $\overset{\bullet}{C}B$ bằng $\frac{1}{4}$ đường tròn) = $\widehat{CEF}$, nên $\widehat{FCE} = 180^\circ - (\widehat{CFE} + \widehat{CEF}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, do đó ΔECF vuông cân ở C.

c) BD là tiếp tuyến nên DB ⊥ AB ⇒ $\widehat{ABD} = 90^\circ$, vì $\widehat{DAB} = 45^\circ$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BC}$) nên $\widehat{ADB} = 45^\circ$.

$\widehat{BEC} = \widehat{BEF} - \widehat{FEC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Tứ giác BECD có $\widehat{CDB} + \widehat{BEC} = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$, nó nội tiếp được đường tròn.

d) Theo chứng minh trên thì E luôn luôn ở trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DCB. Vì $\widehat{DCB} = 90^\circ$ nên đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔDCB là DB.

Biết rằng F chuyển động trên cung AC của nửa đường tròn đường kính AB nên khi $F \equiv A \Rightarrow E \equiv B$ và khi $F \equiv C \Rightarrow E \equiv C$, do đó suy ra rằng: E chuyển động trên cung nhỏ BC của đường tròn đường kính BD.

Vì ΔABD vuông tại B có $\widehat{ADB} = 45^\circ$ nên nó vuông cân, suy ra BD = AB = 2r, vậy E chuyển động trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BECD có bán kính bằng r.

Đề 4

Bài 1 (2,5). Cho biểu thức

$$A = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{1}{1-\sqrt{a}}.$$

a) Rút gọn A;

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Bài 2 (2,5 điểm). a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = 2x^2$;

b) Trên đồ thị (P) lấy điểm A có hoành độ x = 1 và điểm B có hoành độ x = 2. Xác định các giá trị của m, n để đường thẳng y = mx + n tiếp xúc với (P) và song song với AB.

Bài 3 (3,5 điểm). Cho đường tròn (O; r) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. E là điểm bất kì trên cung nhỏ BD ($E \neq B$, $E \neq D$). EC cắt AB ở M, EA cắt CD ở N.

a) Hai tam giác AMC và ANC có quan hệ với nhau như thế nào? Tại sao?

b) Chứng minh AM . CN = $2r^2$;

c) Giả sử AM = 3BM. Tính tỉ số $\frac{CN}{ND}$.

Bài 4 (1,5 điểm). Thí sinh chọn 1 trong 2 bài sau:

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 5x + y = 0 \\ x - \sqrt{y} + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Chọn đoạn thẳng AB = a. Vẽ đường tròn (B; r) với r < a. Kẻ các tiếp tuyến AE, AF với đường tròn đó (E, F là 2 tiếp điểm). Tìm chu vi tam giác AEF theo a và r.

Hải Phòng, năm học 1995 - 1996 (chuyên ban)

Lời giải

Bài 1. a) Rút gọn A: Biểu thức A xác định với $a \geq 0$; $a \neq 1$.

$$A = \frac{2}{1 + a + a^2}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của A; Biểu thức A có giá trị lớn nhất khi $1 + a + a^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Vì $a \geq 0$ nên $1 + a + a^2 \geq 1$, nên mẫu của biểu thức A đã rút gọn có giá trị nhỏ nhất là 1.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 2.

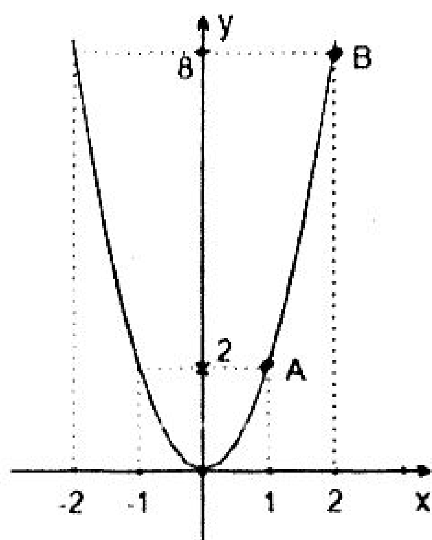
Bài 2. a) Hàm số $y = 2x^2$ xác định với mọi giá trị của $x \in \mathbf{R}$.

Với $x < 0$ hàm số nghịch biến, với $x > 0$ hàm số đồng biến.

Bảng giá trị

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	8	2	0	2	8	...

Đồ thị (P) như hình vẽ bên



b) Ta có toạ độ của A(1; 2) và B(2; 8), và biết rằng phương trình đường thẳng qua A, B có hệ số góc

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{2-1} = 6$.

Đường thẳng y = mx + n song song với đường thẳng y = ax + b nên m = a = 6. Muốn cho y = 6x + n tiếp xúc với (P) thì phương trình hoành độ $2x^2 = 6x + n$ (1) phải có nghiệm kép.

(1) ⇔ $2x^2 - 6x - n = 0$

$\Delta' = 9 + 2n$; $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9 + 2n = 0 \Rightarrow n = -\frac{9}{2}$.

Vậy với m = 6 và $n = -\frac{9}{2}$ thì y = mx + n tiếp xúc với (P) và song song với AB.

Bài 3. Hình 47

a) Vì AB ⊥ CD nên $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$;

sđ $\widehat{NAC} = \frac{1}{2}$ sđ $(\overset{\frown}{EB} + \overset{\frown}{BC})$;

sđ $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}$ sđ $(\overset{\frown}{EB} + \overset{\frown}{AC})$, suy ra $\widehat{NAC} = \widehat{AMC}$.

Vậy ΔAMC ∽ ΔANC vì có hai cặp góc tương ứng bằng nhau.

b) Vì $\Delta AMC \backsim \Delta ANC$ nên $\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{CN} \Rightarrow AM \cdot CN = AC^2$ (1).

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông AOC, có $AC^2 = AO^2 + OC^2$ hay $AC^2 = 2r^2$ (2). Từ (1) và (2) có $AM. CN = 2r^2$.

c) Ta có AM + MB = 2r mà AM = 3MB nên 4MB = 2r

$\Rightarrow AM = \frac{3r}{2}; CN = \frac{2r^2}{AM}$

$\Rightarrow CN = \frac{4r}{3}$ Vì CN + ND = 2r

nên $ND = 2r = \frac{4r}{3} = \frac{2r}{3}$.

Vậy $\frac{CN}{ND} = 2$.

H.47

Bài 4. a) Từ hệ phương trình đã cho, có

$$\begin{cases} x^2 - 5x + y = 0 & (1) \\ \sqrt{y} = x + 1 & (2) \end{cases}$$

Hệ phương trình xác định với $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ và $y \geq 0$.

Từ $\sqrt{y} = x + 1 \Rightarrow y = x^2 + 2x + 1$ (3), thay vào (1) được:

$2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Giải phương trình trên được $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$; thay vào (3) có $y_1 = 4$; $y_2 = \frac{9}{4}$.

Vậy hệ có 2 nghiệm là: (x = 1; y = 4); (x = $\frac{1}{2}$; y = $\frac{9}{4}$).

Hình 48. AE, AF là 2 tiếp tuyến của đường tròn (B) nên AE = AF và AE ⊥ EB; AB ⊥ EF; EF = 2EH.

Trong tam giác vuông AEB thì:

$AE^2 = AB^2 - BE^2 = a^2 - r^2$.

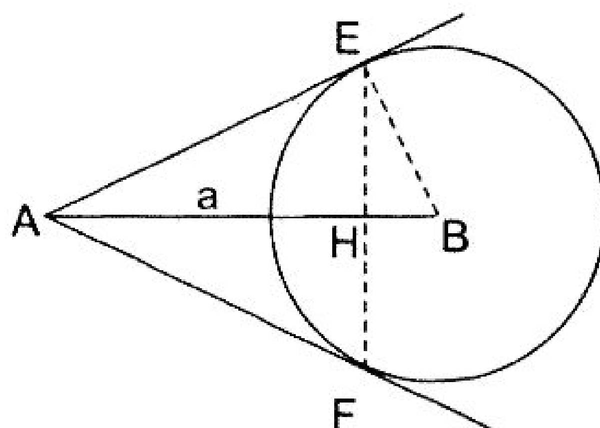
Biết

$2S_{\Delta AEB} = EH.AB = AE.BE$

nên:

$$EH = \frac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{a}$$

$$EF = \frac{2r\sqrt{a^2 - r^2}}{a}.$$



H.48

Vậy chu vi của tam giác AEF là:

$$AE + AF + EF = \frac{2(a + r)\sqrt{a^2 - r^2}}{a}.$$

Đề 5

Bài 1 (3,5 điểm). 1) Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a} + 1} + 1.$$

Tìm các giá trị nguyên của a để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

2) Giải các phương trình

a) $x + \frac{1}{x} = -2$; b) $\sqrt{x-5} = x - 7$

Bài 2 (2 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ mx + y = 1 & (2) \end{cases}$

1) Giải hệ phương trình với m = 2.

2) Xác định giá trị của m để hai đường thẳng có phương trình (1), (2) cắt nhau tại một điểm trên parabol $y = -2x^2$.

Bài 3.(3,5 điểm). Gọi O là trung điểm cạnh BC của tam giác đều ABC. Vẽ góc xOy bằng 60° sao cho tia Ox, Oy cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh tam giác OBM đồng dạng với tam giác NCO, từ đó suy ra $BC^2 = 4BM.CN$.

2) Chứng minh: MO, NO theo thứ tự là tia phân giác các góc BMN, MNC.

3) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định, khi góc xOy quay xung quanh O sao cho các tia Ox, Oy vẫn cắt các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC.

Bài 4 (1 điểm). Giải phương trình
$x^4 + \sqrt{x^2 + 1995} = 1995$.

Thái Bình, năm học 1995 - 1996.

Lời giải

Bài 1. 1) Rút gọn: Điều kiện $0 \le a \ne 1$; $A = \frac{a+1}{a-1}$.

$A = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$; A nhận giá trị nguyên khi $\frac{2}{a-1}$ nguyên; $\frac{2}{a-1}$ nguyên khi a - 1 là ước của 2.

Giải các phương trình a - 1 = 1; a - 1 = -1; a - 1 = 2 có a = 2; a = 0; a = 3 (thoả mãn $0 \le a \ne 1$) nên có A = 3; A = 0; A = 2.

2) Giải phương trình:

a) $x + \frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1$ (với $x \ne 0$)

$\Delta = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$

b) $\sqrt{x-5} = x - 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 \ge 0 \\ x - 5 = (x-7)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 7 \\ x^2 - 15x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 7 \\ x = 6; x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

Bài 2. a) Giải hệ phương trình với m = 2.

$\begin{cases} x + y & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$. Trừ vế với vế của hệ hai phương trình có x = -1, suy ra y = 3. Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

b) Trước hết tìm giao điểm của đường thẳng có phương trình (1), (2) tức là giải hệ phương trình đã cho, có x = -1 và y = m + 1 (với $m \ne 1$). Hai đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm trên parabol $y = -2x^2$ khi toạ độ giao điểm của hai đường thẳng nghiệm đúng $y = -2x^2$, tức là:

$m + 1 = -2(-1)^2 = -2 \Rightarrow m = -3$.

Vậy với m = -3 thì đường thẳng có phương trình (1), (2)

cắt nhau tại một điểm trên parabol $y = -2x^2$.

Bài 3. Hình 49.

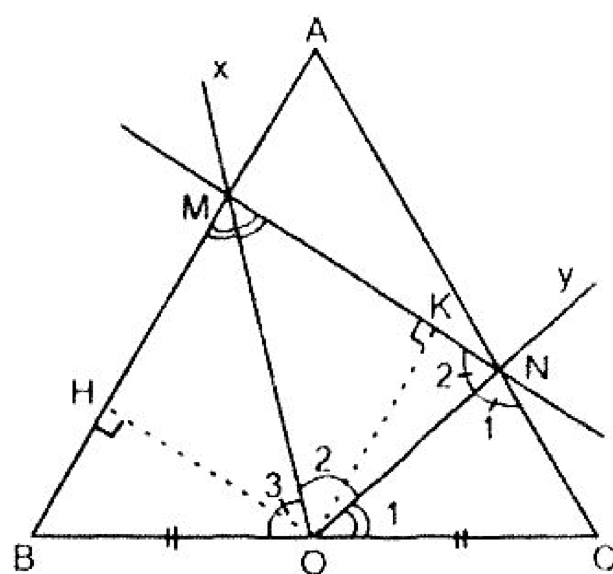
1) Trong ΔNCO có $\widehat{N_1} + \widehat{C} + \widehat{O_1} = 180^\circ$, nhưng $\widehat{O_3} + \widehat{O_2} + \widehat{O_1} = 180^\circ$ và $\widehat{O_2} = \widehat{C} = 60^\circ$ nên $\widehat{N_1} = \widehat{O_3}$.

Vì $\widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$ và $\widehat{O_3} = \widehat{N_1}$ nên $\Delta OBM \backsim \Delta NCO \Rightarrow$

$\widehat{O_1} = \widehat{M_1}$ và $\dfrac{OB}{NC} = \dfrac{BM}{CO}$. Biết $OB = CO = \dfrac{BC}{2}$ nên $\dfrac{\frac{BC}{2}}{NC} = \dfrac{BM}{\frac{BC}{2}}$

$\Rightarrow BC^2 = 4BM.CN$.

2) $\Delta OBM \backsim \Delta NCO =$ $\dfrac{MO}{ON} = \dfrac{BM}{CO}$, nhưng $CO = OB$ nên $\dfrac{MO}{ON} = \dfrac{BM}{OB}$ và có $\widehat{O_2} = \widehat{B} = 60^\circ$, nên $\Delta MON \backsim \Delta MBO$ suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ và $\widehat{O_3} = \widehat{N_2}$. Nhưng nên $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$. Vậy MO, NO là các tia phân giác của $\widehat{BMN}$ và $\widehat{MNC}$.



H.49

3) Từ O hạ $OH \perp AB$, $OK \perp MN$ suy ra $OH = OK$ (vì O nằm trên phân giác của $\widehat{BMN}$.

ΔABC đều đã cho nên O, A, B là cố định do đó OH có độ dài không đổi. Với $\widehat{xOy} = 60^\circ$ quay quanh O luôn cắt AB, AC tại M, N thì MN là một đường thẳng bất kì.

Vậy MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O

bán kính OH.

Bài 4. Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì phương trình đã cho có dạng

$t^2 + \sqrt{t+1995} = 1995$ (1)

Đặt $y = \sqrt{t+1995} > 0 \Rightarrow y^2 = t + 1995$. Khi đó (1) có dạng $t^2 + y = 1995$. Do đó có hệ phương trình:

$$\begin{cases} t^2 + y = 1995 \\ y^2 - t = 1995 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + y = 1995 \\ y^2 - t = 1995 \end{cases} \Rightarrow t^2 + y = y^2 - t$$

$\Leftrightarrow y + t = y^2 - t^2 \Leftrightarrow y + t = (y + t)(y - t)$ (2)

Do $t \geq 0$, $y > 0 \Rightarrow y + t > 0$ nên (2) có dạng:

$1 = y - t \Rightarrow y = 1 + t$ (3)

Do đó $t^2 + y = t^2 + 1 + t = 1995$ hay $t^2 + t - 1994 = 0$

$\Delta_t = 1 + 4.1994 = 7977$

$t_1 = \dfrac{-1+\sqrt{7977}}{2}$; $t_2 = \dfrac{-1-\sqrt{7977}}{2}$ (loại).

Từ $t = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t} = \pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{7977}}{2}}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{7977}}{2}}$.

Đề 6

Bài 1 (2 điểm). Cho biểu thức A với $x > 0$; $y > 0$; $x \neq 4y$; $x \neq 1$: $A = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{xy}-2y} - \dfrac{2x}{x+\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}} \cdot \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn A;

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để y = 625 và A < 0,2.

Bài 2 (2 điểm). Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) đi qua điểm A (-2; 4) và tiếp xúc với đồ thị (T) của hàm số y = (m - 1)x - (m - 1).

a) Tìm a, m và toạ độ tiếp điểm;

b) Vẽ đồ thị (P) và (T) với a, m tìm được trên cùng một hệ trục toạ độ.

Bài 3 (2 điểm). Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình

Một đội xe cần chuyên chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc đội xe đó được bổ sung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định.

Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu xe? Biết rằng số hàng chở trên tất cả các xe có khối lượng bằng nhau.

Bài 4 (4 điểm). Cho M là điểm bất kì trên nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R (M không trùng với A, B). Vẽ các tiếp tuyến Ax, By, Mz của nửa đường tròn đó. Đường Mz cắt Ax và By lần lượt tại N và P. Đường thẳng AM cắt By tại C và đường thẳng BM cắt Ax tại D. Chứng minh:

a) Tứ giác AOMN nội tiếp một đường tròn và NP = AN + BP.

b) N và P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD và BC.

c) AD. BC = $4R^2$.

d) Xác định vị trí M để tứ giác ABCD có diện tích nhỏ nhất

Hà Tây, năm học 1995 - 1996

Lời giải

*Bài 1.*a) Rút gọn biểu thức A với $x > 0; y > 0; x \neq 4y; x \neq 1$:

$$A = \frac{x}{\sqrt{y}}$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để y = 625 và A < 0,2:

$$A = \frac{x}{\sqrt{y}} < 0,2 \text{ hay } \frac{x}{\sqrt{625}} < 0,2 \Rightarrow x < 5.$$

Các số nguyên dương x phải tìm là: 2; 3; 4.

*Bài 2.*a) Vì (P) đi qua điểm A (-2 ; 4) nên có $4 = a(-2)^2$

$\Rightarrow a = 1$. Đồ thị (T) tồn tại khi $m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$.

Đồ thị (P) với a = 1 và đồ thị (T) tiếp xúc khi và chỉ khi phương trình $x^2 = (m - 1)x - (m - 1)$ (1) có nghiệm kép.

(1) $\Leftrightarrow x^2 - (m - 1)x + (m - 1) = 0$

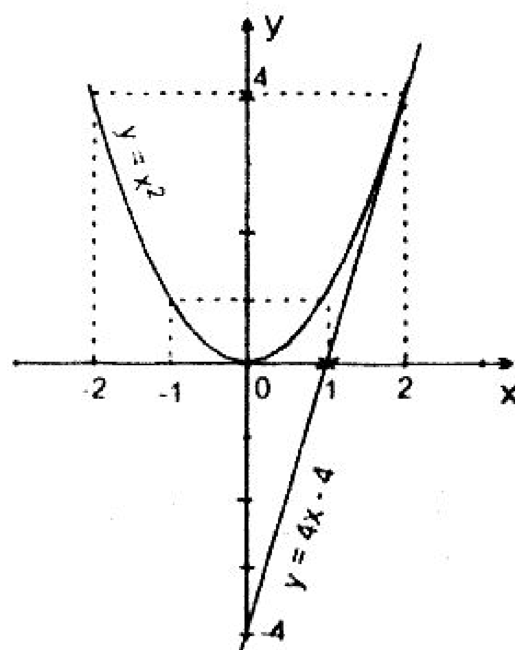
$\Delta = (m - 1)^2 - 4(m - 1) = m^2 - 2m + 1 - 4m + 4$

$= m^2 - 6m + 5.$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$

$\Rightarrow m = 1$ (loại), m = 5, từ đó có:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{m-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2.$$



Vậy với a = 1; m = 5 thì toạ độ tiếp điểm của (P) và (T) là (2; 4).

b) Đồ thị của (P) và (T) với a = 1; m = 5 được vẽ như hình bên.

*Bài 3.*Gọi số xe có lúc đầu là x xe (x > 3) thì mỗi xe phải chở khối lượng hàng là $\frac{36}{x}$ tấn.

Nhưng trước khi làm việc, có thêm 3 xe nữa nên số xe để chở 36 tấn hàng là (x + 3) xe, do đó mỗi xe chỉ còn phải chở khối lượng hàng là $\frac{36}{x+3}$ tấn.

Theo đề bài, có phương trình:

$\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = 1$

$36x + 108 - 36x = x^2 + 3x$

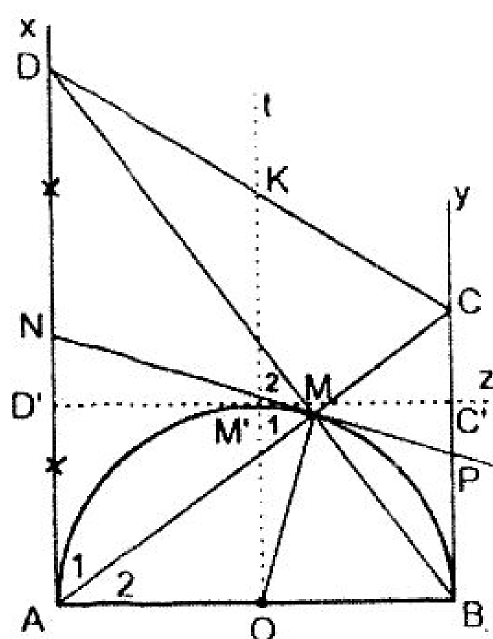
$x^2 + 3x - 108 = 0.$

Giải phương trình được x = 9; x = -12 (loại). Sau khi thử lại, có kết quả: Số xe chở hàng của đội có lúc đầu là 9 xe.

Bài 4. Hình 50

a) Do Ax, Mz là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O nên OA⊥ Ax, OM ⊥ Mz suy ra $\widehat{NAO} + \widehat{NMO} = 2v$, vậy ◊AOMN nội tiếp được đường tròn.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm đến đường tròn, có NA = NM, PB = MP ⇒ NA + PB = NM + MP hay NP = AN + BP.



H.50

b) Theo câu a) có:

MN = NA (1)

Do $\widehat{AMB} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{AMD} = 1v$. Trong tam giác vuông MDA có $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 1v$, $\widehat{D} + \widehat{A_1} = 1v$, mà $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ suy ra $\widehat{D} = \widehat{M_2}$, do đó ΔNMD cân, nên

MN = ND (2). Từ (1) và (2) suy ra MN = NA = ND hay N là trung điểm AD. Chứng minh tương tự có P là trung điểm BC.

c) $\Delta ABD \backsim \Delta BCA$ (vì $\widehat{A} = \widehat{B} = 1v; \widehat{D} = \widehat{A_1}$ góc có cạnh tương ứng vuông góc suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BA}$ hay $AB^2 = 4R^2 = AD \,.\, BC$.

d) Do Ax, By cùng vuông góc với AB nên ABCD là hình thang vuông. Qua O dựng Ot ⊥ AB, Ot cắt nửa đường tròn tại M' (là trung điểm của $\overset{\frown}{AB}$) và cắt DC tại K. Diện tích hình thang vuông là:

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = OK \,.\, AB \qquad (3)$$

Qua M' dựng tiếp tuyến M'z' với nửa đường tròn, nó cắt Ax, By tại D', C'; khi đó hình thang vuông ABCD trở thành hình chữ nhật ABC'D' và $S_{ABC'D'} = OM' \,.\, AB$. (4)

Nhận thấy rằng: Với mọi M ≠ M' thì K luôn nằm ngoài nửa đường tròn đường kính AB, do đó OM' = R < OK nên từ (3) và (4) có $S_{ABC'D'} < S_{ABCD}$.

Trên nửa đường tròn đường kính AB thì trung điểm M' là điểm duy nhất. Vậy khi M là trung điểm của cung nửa đường tròn đường kính AB thì hình thang vuông ABCD sẽ trở thành hình chữ nhật và khi đó nó có diện tích nhỏ nhất.

Đề 7(*)

• *Phần I*

Bài 1 (1,5 điểm). Rút gọn:

$$P = \frac{4a^2 - 4}{ac - c + a - 1}; \qquad M = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}.$$

(*).Thời gian làm bài là 180 phút.

Bài 2 (1,5 điểm). Trong mặt phẳng toạ độ cho hai đường thẳng d_1: $y = 2x - 7$ và d_2: $y = -x - 1$.

1) Vẽ hai đường thẳng d_1 và d_2 trên cùng mặt phẳng toạ độ.

2) Tìm toạ độ giao điểm của d_1 và d_2 bằng đồ thị rồi kiểm tra bằng phép tính.

Bài 3 (1 điểm). Giải phương trình:

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$

Bài 4 (2 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB và S là một điểm bên ngoài đường tròn. SA và SB cắt đường tròn lần lượt tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN.

1) Chứng minh SH vuông góc với AB.

2) Chứng minh bốn điểm M, N, S và H cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

• *Phần II*

Bài 1 (0,75 điểm). Tính $A = \sqrt{24+16\sqrt{2}} - \sqrt{24-16\sqrt{2}}$.

Bài 2 (2 điểm). Cho phương trình bậc hai ẩn x; tham số m, n:

$x^2 + mx + n - 3 = 0$ (1)

1) Cho n = 0

a) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Tìm m để phương trình có một nghiệm là 1. Tính nghiệm còn lại.

2) Tìm m và n để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình

(1) thoả mãn hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 7. \end{cases}$

Bài 3 (1,25 điểm). Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O) và I là điểm chính giữa cung AB (cung AB không chứa C, D). Dây ID, IC cắt AB lần lượt tại M và N.

1)Chứng minh tứ giác DMNC nội tiếp trong một đường tròn.

2) IC và AD cắt nhau tại E; ID và BC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng EF // AB.

Lâm Đồng năm học 1995 - 1996 (chuyên ban)

Lời giải

• *Phần I*

Bài 1. Rút gọn: $P = \dfrac{4a^2 - 4}{ac - c + a - 1} = \dfrac{4(a^2 - 1)}{c(a-1) + (a-1)}$

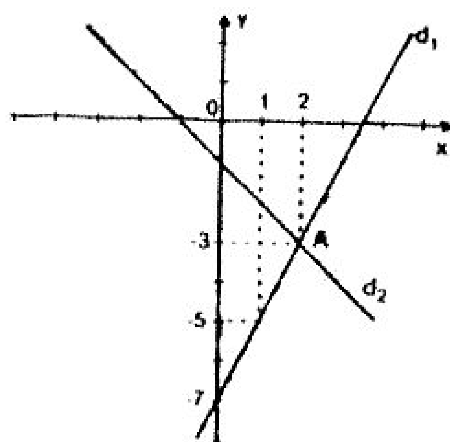
$$= \frac{4(a-1)(a+1)}{(a-1)+(c-1)} = \frac{4(a+1)}{c+1} \text{ (với } a \neq 1\text{)}.$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Bài 2. 1) Vẽ d_1 và d_2.

x	0	1
y = 2x - 7	-7	-5

x	0	1
y = -x - 1	-1	-2



Đồ thị d_1, d_2 như hình vẽ bên.

2) Trên đồ thị có d_1 cắt d_2 tại A(2; -3).

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 = 0 \\ -x - 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 3. Đặt $x^2 = y \geq 0$, phương trình đã cho có dạng:

$y^2 - 6y + 8 = 0$.

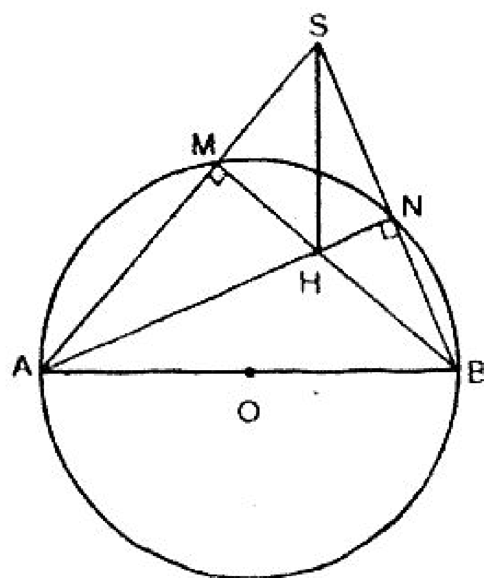
$\Delta' = 9 - 8 = 1 \Rightarrow y_1 = 4; y_2 = 2$

$x^2 = y = 4 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2;$

$x^2 = y = 2 \Rightarrow x_3 = \sqrt{2}\,; x_4 = -\sqrt{2}$.

Bài 4. Hình 51

1) $\widehat{AMB} =$ 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB), tương tự có $\widehat{ANB} =$ 1v; do đó BM ⊥ SA, AN ⊥ SB.



H.51

Hai đường cao BM, AN của ΔSAB cắt nhau tại H nên SH phải là đường cao thứ ba, vậy SH ⊥ AB.

2) Theo câu 1) có $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} =$ 1v, do đó ◊SMHN nội tiếp được đường tròn đường kính SH có tâm là trung điểm của SH.

• *Phần II*

Bài 1

$$A = \sqrt{24 + 16\sqrt{2}} - \sqrt{24 - 16\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2.2\sqrt{2}.4 + 4^2} - \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2.2\sqrt{2}.4 + 4^2}$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{2} + 4\right)^2} - \sqrt{\left(2\sqrt{2} - 4\right)^2} = 2\sqrt{2} + 4 - 4 + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Bài 2. 1) Với n = 0

a) Phương trình (1) có dạng $x^2 + mx - 3 = 0$ (2).

Vì $\Delta = m^2 + 12 > 0$, nên phương trình (2) luôn có nghiệm với mọi m.

b) Khi x = 1 thì phương trình (2) có dạng:

$1 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = 2$.

Vậy khi m = 2 thì (2) có nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -3$.

2) Giải hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 7. \end{cases}$ có $x_1 = 4$; $x_2 = 3$.

Thay giá trị của x_1, x_2 vào (1) được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16 + 4m + n - 3 = 0 \\ 9 + 3m + n - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 + 4m + n = 0 \\ 6 + 3m + n = 0 \end{cases}$$

Giải hệ được m = -7 và n = 15.

Bài 3. Hình 52

1) sđ $\widehat{ANC} = \frac{1}{2}$ sđ $(\overset{\frown}{CDA} + \overset{\frown}{IB})$, nhưng $\overset{\frown}{IB} = \overset{\frown}{IA}$ nên:

sđ $\widehat{ANC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CDAI}$; sđ $\widehat{MDC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{IBC}$;

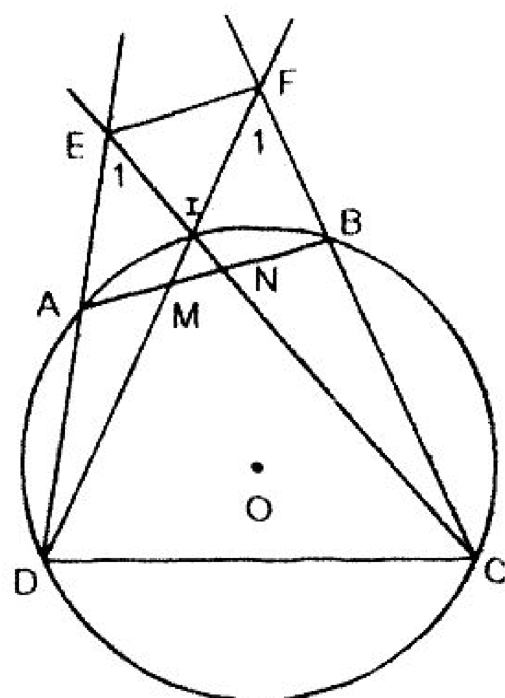
sđ $\left(\widehat{ANC} + \widehat{MDC}\right) = \frac{1}{2}$ sđ $(\overset{\frown}{CDAI} + \overset{\frown}{IBC})$

suy ra $\widehat{ANC} + \widehat{MDC} = 180^\circ$, do đó tứ giác DMNC nội tiếp được đường tròn.

2) Dễ thấy $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$, suy ra EFCD nội tiếp được trong một đường tròn (theo quỹ tích cung chứa góc), do đó:

$\widehat{DEF} + \widehat{DCB} = 180^\circ$, mặt khác: $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$, nên $\widehat{DEF} = \widehat{DAB}$.

$\widehat{DEF}$, $\widehat{DAB}$ bằng nhau, ở vị trí đồng vị suy ra EF // AB.



H.52

Đề 8

Bài 1 (1,5 điểm). Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}; \; B = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

a) Tìm điều kiện có nghĩa của mỗi biểu thức;

b) Rút gọn A và B;

c) Tính tích A.B với $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ và $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Bài 2 (1,5 điểm). Trên cùng một hệ trục toạ độ, cho đường thẳng (D) và parabol (P) có phương trình:

(D) : $y = k(x - 1)$

(P) : $y = x^2 - 3x + 2$.

a) Chứng tỏ rằng với mọi giá trị của k, (D) và (P) luôn

luôn có điểm chung;

b) Trong trường hợp (D) tiếp xúc với (P), tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài 3 (2 điểm). Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước và chảy đầy bể mất 1 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng, vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai trong 1 giờ 30 phút. Hỏi nếu chảy riêng, mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

Bài 4 (3 điểm). Cho đường tròn tâm O và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B là tiếp điểm). Từ A vẽ tia song song với PB cắt (O) tại C ($C \neq A$). Đoạn PC cắt đường tròn tại điểm thứ hai D. Tia AD cắt PB tại E.

a) Chứng minh $\Delta EAB \backsim \Delta EBD$.

b) Chứng minh AE là trung tuyến của tam giác PAB.

Bài 5 (2 điểm). Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD (tức là hình chóp có đáy ABCD là hình vuông và chân đường cao trùng với tâm đáy). Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp, biết rằng $SA = AB = a$.

Thừa Thiên - Huế, năm học 1995 - 1996

(Chuyên ban)

Lời giải

*Bài 1.*a) Điều kiện có nghĩa của biểu thức A là $x > 0$; $y > 0$; $x \neq y$. Điều kiện có nghĩa của biểu thức B là $xy > 0$.

b) Rút gọn

$$A = \sqrt{x} - \sqrt{y};\ \ B = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

c) $AB = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = x - y$

$= \sqrt{3} - \sqrt{2} - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$

*Bài 2.*a) Biết rằng (D) và (P) luôn luôn có điểm chung khi phương trình hoành độ của chúng có nghiệm.

Phương trình hoành độ đó là:

$x^2 - 3x + 2 = k(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 3x - kx + k + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - (3 + k)x + k + 2 = 0$ (1).

$\Delta = (3 + k)^2 - 4(k + 2) = 9 + 6k + k^2 - 4k - 8 = k^2 + 2k + 1$ $= (k + 1)^2$. Vì $\Delta = (k + 1)^2 \geq 0$ nên (1) có nghiệm với mọi giá trị của k.

b) (D) tiếp xúc với P khi phương trình (1) có nghiệm kép tức là:

$\Delta = (k + 1)^2 = 0 \Rightarrow k = -1.$

Khi đó (1) có dạng: $x^2 - 2x + 1 = 0$ nên $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a} = 1.$

Toạ độ tiếp điểm A(1 ; 0).

*Bài 3.*Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng làm đầy bể là x giờ (x > 0), thì thời gian vòi thứ hai chảy riêng làm đầy bể là $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$ giờ, do đó trong một giờ vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{x + \frac{3}{2}} = \dfrac{2}{2x + 3}$ bể.

Cả hai vòi cùng chảy làm đầy bể trong 1 giờ 48 phút hay $\dfrac{9}{5}$ giờ, thì trong một giờ chảy được $\dfrac{5}{9}$ bể. Do đó có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{2x+3} = \frac{5}{9}$$

$9(2x + 3) + 18x = 5x(2x + 3)$

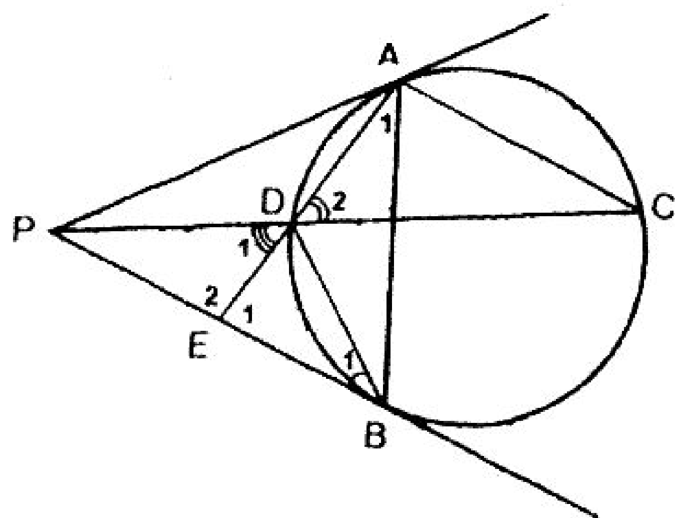
$18x + 27 + 18x = 10x^2 + 15x$

$10x^2 - 21x - 27 = 0.$

Giải phương trình được $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{18}{20}$ (loại). Sau khi thử lại có kết quả:

Vòi thứ nhất, thứ hai chảy đầy bể trong 3 giờ; $4\frac{1}{2}$ giờ.

Bài 4. Hình 53



H.53

a) $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DB}$).

Hai tam giác EAB và EBD có $\widehat{E_1}$ chung và $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ nên $\Delta EAB \backsim \Delta EBD$.

b) AC // PB $\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$. sđ $\hat{P} = \frac{1}{2}$sđ $(\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}) = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ (1) (vì $\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$ và $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AB}$).

sđ $\widehat{D_1}$ = sđ $\widehat{D_2} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{P} = \widehat{D_1}$. Hai tam giác PEA và DEP có $\widehat{E_2}$ chung và $\hat{P} = \widehat{D_1}$ nên $\Delta PEA \backsim \Delta DEP$ suy ra:

$$\frac{PE}{DE} = \frac{AE}{PE} \Rightarrow PE^2 = AE.DE \quad (3)$$

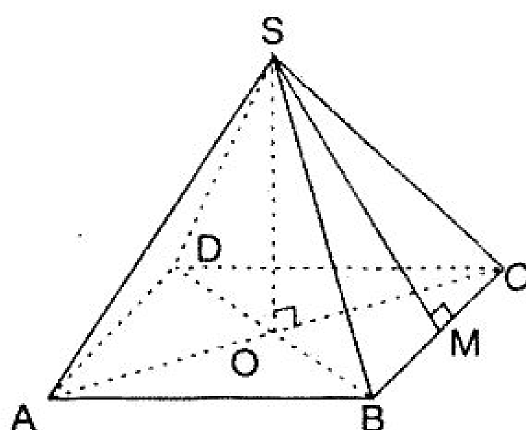
Theo chứng minh câu a) có $\Delta EAB \backsim \Delta EBD$, suy ra:

$\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow EB^2 = EA.ED$ (4)

Từ (3) và (4) có PE = EB hay AE là trung tuyến cua ΔPAB.

Bài 5. Hình 54.

Hạ $SM \perp BC$ thì SM là đường cao của tam giác đều SBC có cạnh là a nên $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó:



H.54

$Sxq = \frac{1}{2} \cdot p \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$. Vì ABCD là hình vuông cạnh là a nên $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Theo định lí Pitago, trong tam giác vuông SOA thì

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó: $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Đề 9

Bài 1 (3 điểm). Rút gọn biểu thức sau:

a) $A = \frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2 - \frac{1}{4}\sqrt{120} - \sqrt{\frac{15}{2}}$;

b) $B = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (3+\sqrt{3}-2\sqrt{2})$;

c) $C = \frac{4x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{1 - 49x^2}$ với $x < \frac{1}{3}, x \neq \pm\frac{1}{7}$.

Bài 2 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P)

a) Vẽ đồ thị của hàm số (P);

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó hãy tìm hai điểm A và B.

Bài 3 (3 điểm). Cho đường tròn tâm O, đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B ($B \neq C$) và vẽ đường tròn tâm O' đường kính BC. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ một dây cung DE vuông góc với AB, DC cắt đường tròn (O') tại I.

a) Tứ giác ADBE là hình gì? Tại sao?

b) Chứng minh ba điểm I, B, E thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng MI là tiếp tuyến của đường tròn tâm (O') và $MI^2 = MB.MC$.

Bài 4 (1,5 điểm). Giả sử x và y là hai số thoả mãn $x > y$ và $xy = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

Nam Hà, năm học 1995 - 1996

Lời giải

Bài 1. Rút gọn các biểu thức:

a) Đáp số $A = \frac{11}{2}$.

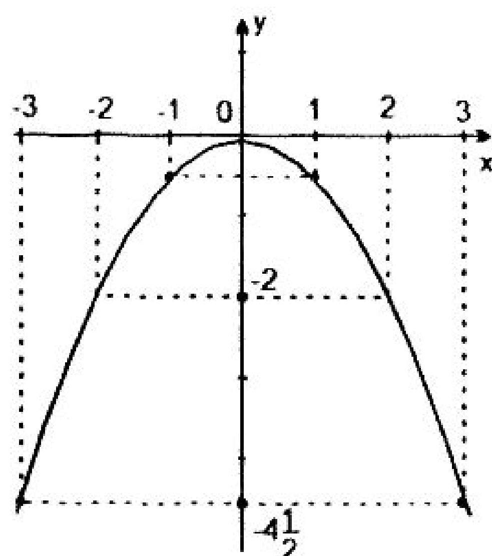
b) Đáp số B = 3.

c) $C = \frac{4x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{1 - 49x^2} = \frac{4x - \sqrt{(3x-1)^2}}{(7x-1)^2}$

$= \frac{4x - (1 - 3x)}{(7x-1)^2}$ (với $x < \frac{1}{3}$)

$= \frac{4x - 1 + 3x}{(7x-1)^2} = \frac{7x - 1}{(7x-1)^2} = \frac{1}{7x - 1}$

(với $x \neq \pm\frac{1}{7}$)



Bài 2. a) Hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ xác định với mọi $x \in R$. Với $x > 0$ hàm số nghịch biến với $x < 0$ hàm số đồng biến.

Bảng giá trị

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$-4\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-4\frac{1}{2}$	...

Đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ là hình vẽ bên.

b) Đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị (P) khi phương trình hoành độ $2x + m = -\frac{1}{2}x^2$ có biệt số $\Delta > 0$.

$2x + m = -\frac{1}{2}x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2m = 0.$

$\Delta' = 4 - 2m > 0 \Rightarrow m < 2.$

Vậy khi m < 2 thì đường thẳng y = 2x + m cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt.

$x_1 = -2 + \sqrt{\Delta'} \Rightarrow y_1 = 2(-2 + \sqrt{\Delta'}) + m = -4 + 2\sqrt{\Delta'} + m$, do đó (A)-2 + $\sqrt{\Delta'}$; - 4 + 2$\sqrt{\Delta'}$ + m).

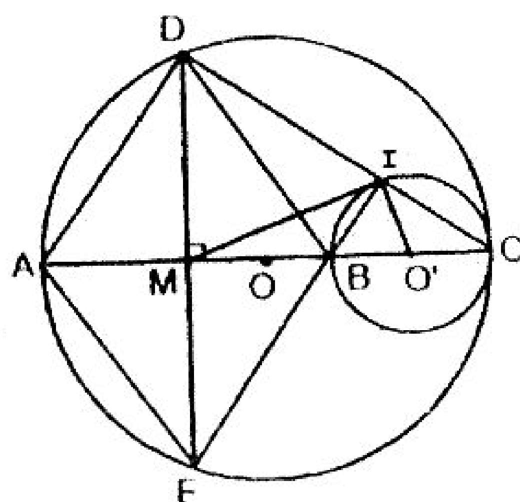
$x_2 = -2 - \sqrt{\Delta'} \Rightarrow y_2 = 2(-2 - \sqrt{\Delta'}) + m = -4 - 2\sqrt{\Delta'} + m$, do đó B = (-2 - $\sqrt{\Delta'}$; -4 - 2$\sqrt{\Delta'}$ + m).

Bài 3. Hình 55

a) OA ⊥ DE ⇒ MD = ME, MA = MB (gt) nên ADBE là hình bình hành.

Hình bình hành ADBE có DE ⊥ AB, nó là hình thoi.

b) $\widehat{ADC}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AC) nên AD ⊥ DC, $\widehat{BIC}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BC) nên BI ⊥ DC.



H.55

Vậy AD // BI, AD // BE (vì ADBE là hình thoi), mà qua B ngoài AD chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với AD nên BI = BE hay I, B, E thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông EID thì IM là trung tuyến đi tới cạnh huyền DE nên MI = ME do đó ΔMEI cân, suy ra

$\widehat{MEI} = \widehat{MIE}$ (1).

Trong tam giác vuông MEB thì $\widehat{MEB} + \widehat{MBE} = 1v$, mà $\widehat{MBE} = \widehat{IBO'}$ (góc đối đỉnh) nên $\widehat{MEB} + \widehat{IBO'} = 1v$ (2).

Theo (1) và (2) có: $\widehat{IBO'} + \widehat{MIB} = 1v$ (3). Tam giác O'IB cân nên $\widehat{IBO'} + \widehat{O'IB}$ (4). Từ (3) và (4) có $\widehat{MIB} + \widehat{O'IB} = \widehat{MIO'} = 1v$ suy ra MI ⊥ O'I nên MI là tiếp tuyến của đường tròn tâm O'.

$\Delta MIB \backsim \Delta MCI$ (vì có $\widehat{M}$ chung và $\widehat{MIB} = \widehat{MCI}$) suy ra $\frac{MI}{MC} = \frac{MB}{MI}$ hay $MI^2 = MB.MC$.

Bài 4. Ta có:

$$A = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 2xy}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2xy}{x - y}.$$

Do x > y và xy = 1 nên:

$$A = \frac{(x - y)^2}{x - y} + \frac{2xy}{x - y} = x - y + \frac{2}{x - y}.$$

Biết $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ nên

$$A = x - y + \frac{2}{x - y} \geq 2\sqrt{(x - y)\frac{2}{x - y}} \Rightarrow$$

$$A = x - y + \frac{2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$$, như vậy $A_{min} = 2\sqrt{2}$.

Đề 10

Bài 1 (2,5 điểm). Cho phương trình $2x^2 + 8x + m = 0$, có một trong các nghiệm bằng 3. Tìm giá trị của m và các nghiệm còn lại.

Bài 2 (2,5 điểm). Cho $A = \left(x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) : \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $x = \sqrt{2} - 1$.

Bài 3 (2,5 điểm). Một học sinh lớp 9 của trường phổ thông cơ sở TT có kết quả kiểm tra về môn toán với 10 lần điểm như sau: 7, 8, 6, 7, 7, 8, 9, 6, 10, 7.

a) Lập bảng phân phối thực nghiệm, tính số trung bình điểm của học sinh đó.

b) Tính phương sai, độ lệch tiêu chuẩn và cho biết ý nghĩa độ lệch này.

Bài 4 (2,5 điểm). Cho đường tròn tâm O bán kính R. Đường thẳng d cắt (O tại hai điểm A, B. Trên d lấy một điểm M và từ đó kẻ hai tiếp tuyến MN, MP (N, P là tiếp điểm).

a) Chứng minh góc PMO bằng góc PNO.

b) Tìm 2 điểm cố định mà đường tròn (MNP) luôn đi qua khi M di động trên d.

c) Xác định vị trí của M để tam giác MNP là tam giác đều.

Nghệ An, năm học 1995 - 1996 (lần 1)

Lời giải

Bài 1. Thay x = 3 vào phương trình, ta có:

$42 + m = 0 \Rightarrow m = -42$.

Với m = -42, phương trình đã cho có dạng:

$2x^2 + 8x - 42 = 0$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

Giải ra ta có 2 nghiệm $x_1 = -7; x_2 = 3$

Bài 2. a) Rút gọn A

Với $x \neq 0, x \neq \pm 1$ có $A = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$

b) Tính giá trị của A

Thay $x = \sqrt{2} - 1$ vào, có $A = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$

Bài 3. Gọi X là số điểm môn toán đạt được sau mỗi lần kiểm tra, ta có bảng phân phối thực nghiệm sau:

X	Tần số
$x_1 = 6$	$m_1 = 2$
$x_2 = 7$	$m_2 = 4$
$x_3 = 8$	$m_3 = 2$
$x_4 = 9$	$m_4 = 1$
$x_5 = 10$	$m_5 = 1$
	$n = 10$

Điểm trung bình của học sinh đó là:

$$X = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_5m_5}{10}$$

$$= \frac{12 + 28 + 16 + 9 + 10}{10} = 7,5.$$

Phương sai điểm kiểm tra toán của học sinh đó là:

$$\sigma^2 = \frac{m_1(x_1 - \overline{X})^2 + m_2(x_2 - \overline{X})^2 + ... + m_5(x_5 - \overline{X})^2}{10}$$

$$= \frac{4,5 + 1,0 + 0,5 + 2,25 + 6,25}{10} = 1,45$$

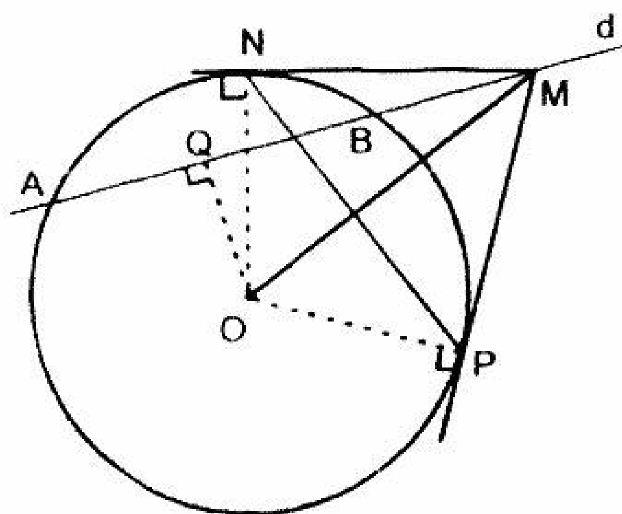
$\sigma\sqrt{1,45} \approx 1,2.$

Điều này có ý nghĩa là về trung bình thì mỗi lần kiểm tra chênh lệch với giá trị trung bình 1, 2.

Bài 4. Hình 56

a) MN, MP là 2 tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ON ⊥ MN, OP ⊥ MP suy ra $\widehat{ONM} = \widehat{OPM} = 1v$, do đó tứ giác MPON nội tiếp được đường tròn đường kính OM.

Vậy $\widehat{PMO} = \widehat{PNO}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{OP}$ của đường tròn đường kính OM).



H.56

b) Hạ OQ ⊥ AB ⇒ QA = QB. Vì A, B cố định nên Q cố định. Q, N, P cùng nhìn OM dưới một góc vuông nên 5 điểm O, Q, N, M, P nằm trên đường tròn đường kính OM (theo quỹ tích cung chứa góc). Vậy đường tròn (PMN) luôn đi qua 2 điểm cố định O và Q khi M di chuyển trên d.

c) Khi ΔMNP đều thì $\widehat{NMP} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{OMN} = \frac{1}{2}\widehat{NMP} = 30^\circ$, do đó OM = 2ON = 2R.

Dựng đường tròn tâm O bán kính 2R, đường tròn này cắt d tại M (hay M'), đó chính là vị trí cần xác định của điểm M để ΔMNP đều.

Thật vậy, với OM = 2ON ⇒ $\widehat{OMN} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{NMP} = 60^\circ$, nên ΔMNP đều.

Đề 11

Bài 1 (2,5 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$

Giải hệ trên:

a) Bằng phép tính

b) Bằng đồ thị.

Bài 2 (2,5 điểm). Cho phương trình bậc hai:

$x^2 - 2(k - 2)x - 2k - 5 = 0$, (k là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của k.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của k sao cho : $x_1^2 + x_2^2 = 18$.

Bài 3 (2,5 điểm). Cho hình chóp tam giác đều S.ABC.

a) Chứng minh BC vuông góc với SA, AB vuông góc với SC, AC vuông góc với SB.

b) Tính thể tích của hình chóp, biết tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng a.

Bài 4 (2,5 điểm). Gọi AH, AM lần lượt là đường cao, trung tuyến của tam giác vuông ABC (góc A = 1v), với H, M nằm trên cạnh huyền BC. Đường tròn tâm H, bán kính HA cắt AB ở P và AC ở Q.

a) Chứng minh: P, H, Q thẳng hàng

b) Chứng minh: MA vuông góc với PQ.

Nghệ An, năm học 1995 - 1996 (lần 2)

Lời giải

Bài 1. a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \quad (1) \\ 3x + 2y = 9 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -2 \ (1) \\ 3x + 2y = 9 \quad (2) \end{cases}$$

Cộng vế với vế có $7x = 7 \Rightarrow x = 1$.

Từ (1) suy ra $y = 3$.

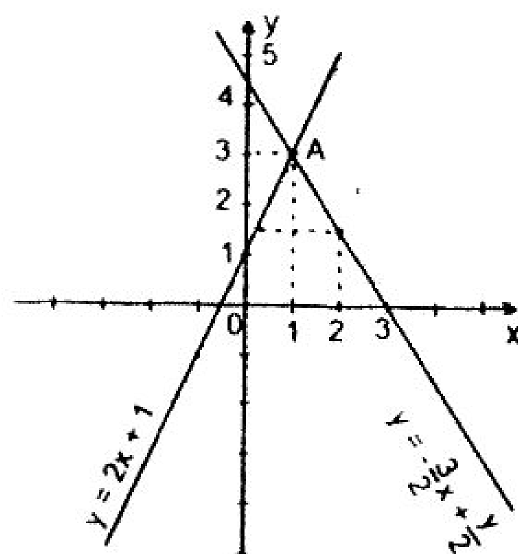
Nghiệm của hệ là $(x = 1; y = 3)$

b) Giải hệ phương trình bằng đồ thị:

Từ (1) suy ra $y = 2x + 1$ và từ (2) suy ra $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

x	0	1
$y = 2x + 1$	1	3

x	0	2
$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$



Đồ thị hàm số $y = 2x + 1$ và $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ cắt nhau tại A (1; 3), do đó nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x = 1; y = 3)$.

Bài 2. a) $\Delta' = (k - 2)^2 + 2k + 5 = k^2 - 4k + 4 + 2k + 5$

$$= k^2 - 2k + 9 = (k - 1)^2 + 8 \geq 8.$$

Ta thấy Δ' luôn dương nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của k

b) Theo định lí Viét, có:

$x_1 + x_2 = 2(k - 2)$ và $x_1x_2 = -2k - 5$, do đó:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$= [2(k - 2)]^2 + 4k + 10 = 4k^2 - 12k + 26.$$

Biết $x_1^2 + x_2^2 = 18$ nên: $4k^2 - 12k + 26 = 18 \Leftrightarrow 4k^2 - 12k + 8 = 0 \Leftrightarrow k = 1; k = 2$. Vậy với $k = 1; k = 2$ ta có $x_1^2 + x_2^2 = 18$.

Bài 3. Hình 57

a) Gọi M là trung điểm của BC, có AM ⊥ BC, ΔSBC đều nên SM ⊥ BC, suy ra BC ⊥ MP (SAM) do đó BC ⊥ SA (vì SA ∈ (SAM)).

Chứng minh tương tự, có AB ⊥ SC, AC ⊥ SB.

H.57

b) Hạ SH ⊥ AM, có:

$$SH^2 = SM^2 - HM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Bài 4. Hình 58

a) Vì $\widehat{PAQ} = 1v$ nên PQ là đường kính của đường tròn tâm H, suy ra P, H, Q thẳng hàng.

b) Tam giác AHC vuông nên $\widehat{HAQ} + \hat{C} = 1v$ (1)

Vì AH = HQ nên ΔHAQ

H.58

cân, suy ra $\widehat{HAQ} = \widehat{HQA}$ (2). Do AM là đường trung tuyến đi tới cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC nên MA = MC hay ΔMAC cân suy ra $\widehat{MAQ} = \widehat{C}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có $\widehat{HQA} + \widehat{MAQ}$ = 1v, từ đó suy ra $\widehat{ADQ}$ = 1v hay MA ⊥ PQ.

Đề 12

Bài 1 (2,5 điểm). Cho biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1}\right)$$

a) Rút gọn A;

b) Tìm các giá trị của A nếu $a = 1996 - 2\sqrt{1995}$.

Bài 2 (2 điểm). Một người chuyển động đều trên một quãng đường gồm một đoạn đường bằng và một đoạn đường lên dốc. Vận tốc trên đoạn đường bằng và trên đoạn đường lên dốc tương ứng là 40 km/h và 20 km/h. Biết rằng đoạn đường lên dốc ngắn hơn đoạn đường bằng là 110 km và thời gian để người đó đi cả quãng đường là 3 giờ 30 phút. Tính chiều dài quãng đường người đó đã đi.

Bài 3 (2 điểm). Cho phương trình $(2m - 1)x^2 - 4mx + 4 = 0$ (1), với ẩn là x.

a) Giải phương trình (1) với m = 1;

b) Giải phương trình (1) với m bất kì;

c) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm bằng m.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho tam giác ABC (AC = BC) nội tiếp trong đường tròn có đường kính CK. Lấy một điểm M trên cung nhỏ BC ($M \neq B$, $M \neq C$), kẻ nửa đường thẳng AM. Trên AM kéo dài về phía M lấy D sao cho MB = BD.

a) Chứng minh MK // BD.

b) Kéo dài CM cắt BD tại I. Chứng minh BI = ID và CA = CB = CD;

c) Chứng minh rằng $MA + MB \leq CA + CB$.

d) Trên CK kéo dài về phía C lấy N sao cho CA = CN. Tìm điểm E trên NK để tam giác NDE vuông tại D.

Vĩnh Phú, năm học 1995 - 1996

Lời giải

Bài 1. a) Rút gọn A

Điều kiện để A có nghĩa là $a \geq 0$; $A + 1 \neq 0$ và $a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1 \neq 0$. Thực hiện các phép tính, có $A = \sqrt{a} + 1$ (với $a \geq 0$).

b) Tính số trị của A

$$A = \sqrt{a} + 1 = \sqrt{1996 - 2\sqrt{1995}} + 1$$

$$= \sqrt{1995 - 2\sqrt{1995} + 1} + 1 = \sqrt{\left(\sqrt{1995} - 1\right)^2} + 1 = \sqrt{1995}$$

Bài 2. Gọi x là thời gian để người đó đi trên quãng đường lên dốc (x tính bằng giờ, $0 < x < 3,5$), thì thời gian đi trên quãng đường bằng là (3,5 - x) giờ. Do đó đoạn đường lên dốc là 20x km và đoạn đường bằng là 40 (3,5 - x) km. Ta có phương trình: 40 (3,5 - x) - 20x = 110

Giải phương trình trên được $x = 0,5$, thoả mãn điều kiện bài toán.

Vậy độ dài cả quãng đường người đó đã đi là:

$0,5.20 + (3,5 - 0,5).40 = 10 + 120 = 130$ (km)

Bài 3. a) Khi $m = 1$, phương trình (1) có dạng: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

b) Giải phương trình với m là bất kì:

• Nếu $2m - 1 = 0$ hay $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có dạng $- 2x + 4 = 0$ (*) $\Rightarrow x = 2$.

• Nếu $2m - 1 \neq 0$ hay $m \neq \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có:

$\Delta' = 4m^2 - 4(2m - 1) = 4m^2 - 8m + 4 = (2m - 2)^2 \geq 0$, do đó:

$$x_1 = \frac{2m + 2m - 2}{2m - 1} = 2;\ x_2 = \frac{2m - 2m + 2}{2m - 1} = \frac{2}{2m - 1}$$

c) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm bằng m:

• Với $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{2}{2m - 1}$, nên để cho (1) có nghiệm bằng m thì:

$$\begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{2m - 1} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} m = 2 \\ 2m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1 \pm 17}{4} \end{cases}$$

• Với $m = \frac{1}{2}$ theo (*) có $x = 2 \neq \frac{1}{2}$, suy ra $m = \frac{1}{2}$ không thoả mãn.

Bài 4. Hình 59

a) MB = MD (theo giả thiết) nên ΔMBD cân suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (1). ΔKBC = ΔKAC (vì KC chung và CB = CA) nên :

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow \overset{\frown}{KB} = \overset{\frown}{KA} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (2).

$\widehat{BMA} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{B_1} + \widehat{D_1}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có $\widehat{B_1} = \widehat{M_1} \Rightarrow$ MK // BD

b) $\widehat{KMC}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính KC) nên CM $\perp$ KM, mà KM // BD suy ra CM $\perp$ BD.

H.59

Tam giác cân MBD có CI là đường cao thì CI cũng là trung tuyến do đó IB = ID.

ΔBCI = ΔDCI (c.g.c) suy ra CB = CD, nhưng CB = CA (theo giả thiết) nên CA = CB = CD.

c) Trong ΔCAD ta luôn có AD $\le$ CD + CA, nhưng CD = CB nên AD $\le$ CA + CB.

Biết AD = MA + MD, nhưng MD = MB (vì ΔMBD cân) nên AD = MA + MB $\le$ CA + CB.

Đề 13

Bài 1 (2,5 điểm). Xét biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right)$$

1) Rút gọn A

2) Với giá trị nào của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 2 (2,5 điểm). Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

Bài 3 (4 điểm). Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

1) Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác của góc BMD.

2) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vị trí điểm M.

3) Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F, chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

4) Chứng minh tích $P = AE \times AF$ không đổi khi M di động. Tính P theo bán kính R và góc $ABC = \alpha$.

Bài 4 (1 điểm). Cho hai bất phương trình

$3mx - 2m > x + 1$ (1)

$m - 2x < 0$ (2)

Tìm m để hai bất phương trình trên có cùng một tập hợp nghiệm.

Hà Nội, năm học 1996 - 1997

Lời giải

*Bài 1.*1) Rút gọn

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right)$$

Điều kiện tồn tại A: $x \geq 0; x \neq 1$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(x-1)}\right] : \frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-1-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

2) $A = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}+1-1-1}{\sqrt{x}+1} =$

$$= \frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

A có giá trị nhỏ nhất khi $\sqrt{x} + 1$ nhỏ nhất.

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1$. Do đó giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{x} + 1 = 1$ khi $x = 0$.

Vậy khi $x = 0$ thì A có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

*Bài 2.*Gọi vận tốc dự định đó là x km/h ($x > 0$) thì thời gian dự định đi từ A đến B là $\dfrac{120}{x}$ giờ.

Một phần ba quãng đường AB là 40km, thời gian đi

$\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc dự định là $\frac{40}{x}$ giờ.

Hai phần ba quãng đường đi với vận tốc (x + 10) km/h là 80 km, do đó thời gian đi quãng đường này là $\frac{80}{x+10}$ giờ.

Theo đầu bài người đó đến B sớm hơn 24 phút hay $\frac{2}{5}$ giờ, nên có phương trình: $\frac{120}{x} - \frac{2}{5} = \frac{40}{x} + \frac{80}{x+10}$.

Thực hiện các phép biến đổi tương ứng, có:

$x^2 + 10x - 2000 = 0$

Giải phương trình được $x_1 = 40$; $x_2 = -50$ (loại)

$x = 40 \Rightarrow x > 0$, thoả mãn điều kiện bài toán

Thời gian xe lăn bánh trên đường là:

$\frac{120}{x} - \frac{2}{5} = \frac{120}{40} - \frac{2}{5} = 3 - \frac{2}{5} = 2\frac{3}{5}$ (giờ) hay 2 giờ 36 phút

Đáp số: 40 km/h

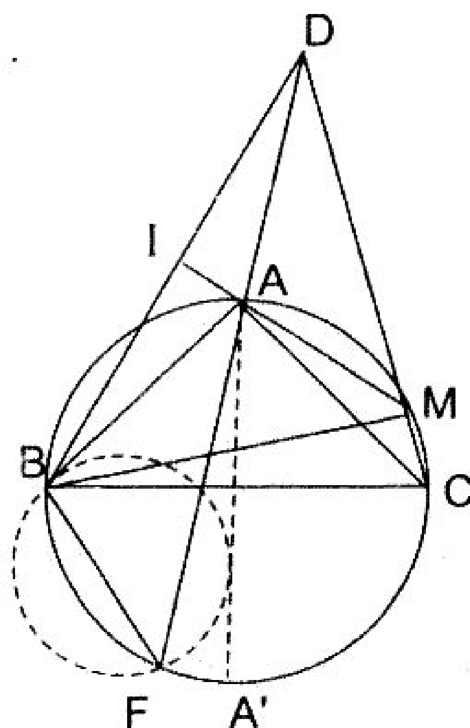
2 giờ 36 phút

Bài 3. Hình 60

1) Tứ giác AMCD nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ (1) vì chúng cùng bù với $\widehat{AMC}$.

Theo giả thiết thì A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ từ đó suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$ (2).

Từ (1) và (2) có $\widehat{AMD} = \widehat{AMB}$ hay MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$.



H.60

2) ΔBMD có MI là đường cao vừa là đường phân giác nên ΔBMD cân, do đó MI là trung trực của BD suy ra AD = AB (3). Vì $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ nên AB = AC (4). Từ (3) và (4) suy ra AB = AC = AD do đó A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDBC.

Đường tròn ngoại tiếp ΔDBC cố định vì điểm A cố định và có bán kính AB không đổi, do đó $\widehat{BDC}$ có độ lớn không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cung nhỏ AC.

3) sđ $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$, sđ $\widehat{BFA} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ vậy $\widehat{ABC} = \widehat{BFA}$, từ đó suy ra rằng, AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

4) $\Delta ABE \backsim \Delta AFB$ (vì có $\widehat{BAE}$ chung và $\widehat{ABE} = \widehat{BFA}$) suy ra $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$ hay $AE.AF = AB^2$.

Biết AB có độ dài không đổi nên AB^2 cũng không đổi. Vậy $P = AE.AF = AB^2$ không đổi khi M di động trên cung nhỏ AC.

Dựng đường kính AA', trong tam giác ABA' vuông tại B ta có $\widehat{BA'A} = \widehat{BFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$), $\widehat{ABC} = \alpha = \widehat{BFA}$ (theo chứng minh trên và theo giả thiết), do đó $\widehat{BA'A} = \alpha$.

Vậy AB = AA'sinα nên

$P = AB^2 = (2R)^2\sin^2\alpha = 4R^2\sin^2\alpha$.

Bài 4. Giải từng bất phương trình, ta có:

Với (1) khi $m > \frac{1}{3}$ thì $x > \frac{2m+1}{3m-1}$

Với (2) có $x > \frac{m}{2}$

(Chú ý rằng nếu $m < \frac{1}{3}$ thì nghiệm của (1) là $x < \frac{2m+1}{3m-1}$, do vậy (1), (2) không thể có cùng một tập hợp nghiệm).

Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm khi và chỉ khi $m > \frac{1}{3}$ và $\frac{m}{2} = \frac{2m+1}{3m-1}$ (*)

Giải phương trình (*) có $m_1 = 2$; $m_2 = -\frac{1}{3}$ (loại).

Vậy với m = 2 thì hai bất phương trình trên có cùng một tập hợp nghiệm.

Đe 14

Bài 1 (2 điểm). Cho a, b, c là 3 số dương

Đặt $x = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Chứng minh rằng: $a + c = 2b \Leftrightarrow x + z = 2y$

Bài 2 (2điểm). Xác định giá trị của a để tổng bình phương các nghiệm của phương trình:

$x^2 - (2a - 1)x + 2(a - 1) = 0$, đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3 (3 điểm). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 185\\(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 65\end{cases}$$

Bài 4 (3 điểm). Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Vẽ dây AE của (O_1) tiếp xúc với (O_2); vẽ dây AF của (O_2) tiếp xúc với (O_1) tại A.

a) Chứng minh rằng: $\frac{BE}{BF} = \frac{AE^2}{AF^2}$

b) Gọi C là điểm đối xứng của A qua B. Có nhận xét gì về hai tam giác EBC và FBC.

c) Chứng minh tứ giác AECF nội tiếp.

Hải Phòng, năm học 1996 - 1997

(Thi điều kiện vào lớp 10 chuyên lí)

Lời giải

Bài 1. $x + z = 2y \Leftrightarrow x - y = y - z$

Xét $x - y = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$

$= \frac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$ (1)

Tương tự: $y - z = \frac{b-c}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$x - y = y - z \Leftrightarrow a - b = b - c$

hay $x + z = 2y \Leftrightarrow a + c = 2b$ (đpcm)

Bài 2. Để phương trình có 2 nghiệm phải có $\Delta \geq 0$.

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2a - 1)^2 - 8(a - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 - 8a + 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 12a + 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2a - 3) \geq 0$, đúng với mọi giá trị của a.

Tổng bình phương của hai nghiệm:

$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 = x_2^2 - 2x_1x_2.$

$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a - 1)^2 - 4(a - 1)$

$= 4a^2 - 4a + 1 - 4a + 4 = 4a^2 - 8a + 4 + 1$

$= 4(a^2 - 2a + 1) + 1 = 4(a - 1)^2 + 1.$

Biết $(a - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow 4(a^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow 4(a^2 - 1) + 1 \geq 1$, do đó tổng bình phương hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi a = 1.

Bài 3. Cộng vế với vế của hai phương trình đã cho, được:

$2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 250 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 125$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = 5^3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \qquad (*)$

Thế (*) vào hệ đã cho, có:

$$\begin{cases}(25 + xy).5 = 185\\(25 - xy).5 = 65\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25 + xy = 37\\25 - xy = 13\end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ trên, được: $2xy = 24$. Lúc này ta có hệ:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 = 25\\2xy = 24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x + y)^2 = 49\\xy = 12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + y = \pm 7\\xy = 12\end{cases}$$

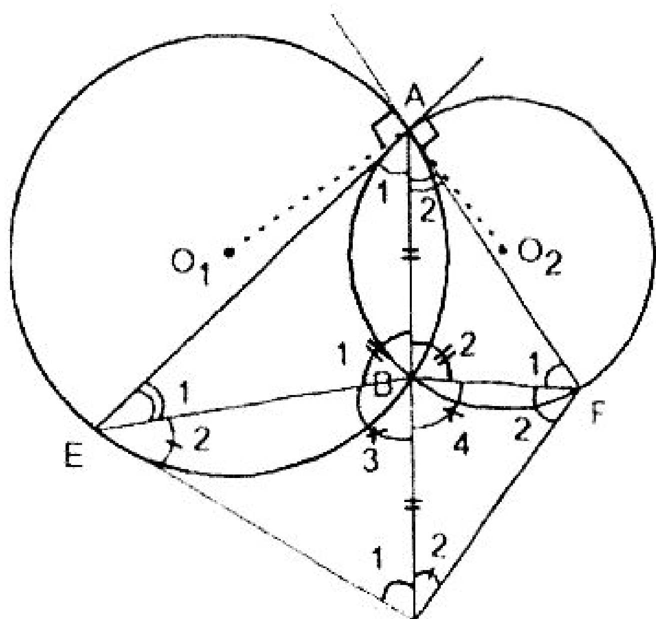
Áp dụng định lí Viét đảo, với hệ:

a) $\begin{cases}x + y = 7\\xy = 12\end{cases}$ suy ra hai nghiệm $\begin{cases}x = 3; x = 4\\y = 4; y = 3\end{cases}$

b) $\begin{cases}x + y = -7\\xy = 12\end{cases}$ suy ra hai nghiệm $\begin{cases}x = -3; x = -4\\y = -4; y = -3\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm.

Bài 4. Hình 61



H.61

a) $\widehat{A_1} = \widehat{F_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{AB}$ của đường tròn (O_2). Tương tự có $\widehat{E_1} = \widehat{A_2}$, do đó $\Delta BEA \backsim \Delta BAF$ (1) (g.g) suy ra:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BF}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AE}{AF}\right)^2 = \frac{BE}{BA} \cdot \frac{BA}{BF}$$

hay $\dfrac{AE^2}{AF^2} = \dfrac{BE}{BF}$

b) Từ (1) suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ do đó có $\widehat{B_3} = \widehat{B_4}$ và

$\dfrac{EB}{BC} = \dfrac{EB}{AB} = \dfrac{AB}{BF} = \dfrac{BC}{BF}$ (vì BC = BA theo giả thiết).

Như vậy, ta có $\widehat{B_3} = \widehat{B_4}$ và $\dfrac{EB}{BC} = \dfrac{BC}{BF}$ nên $\Delta BEC \backsim \Delta BCF$ (2) (c.g.c)

c) Từ (2) có $\widehat{C_1} = \widehat{F_2}, \widehat{C_2} = \widehat{E_2}$, theo chứng minh trên có $\widehat{A_1} = \widehat{F_1}, \widehat{A_2} = \widehat{E_1}$, từ đó suy ra:

$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} + \widehat{F_1} + \widehat{F_2}$ hay

$\widehat{EAF} + \widehat{ECF} = \widehat{AEC} + \widehat{AFC} = 180^\circ$, tứ giác AECF nội tiếp được đường tròn.

Đề 15

Bài 1 (2,5 điểm). 1) Cho phương trình (x là ẩn, m là tham số):

$(2x^2 - x - 6)\sqrt{x - m} = 0$

a) Giải phương trình khi m = -1,45;

b) Giải và biện luận phương trình theo m.

2) Rút gọn: $\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} - \left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2$

Bài 2 (3 điểm). Cho hàm số $y = f(x) = -x|x|$ (P)

1) Chứng minh hàm số f(x) nghịch biến với mọi $x \in \mathbf{R}$

2)a) Tìm toạ độ giao điểm của đồ thị (P) với đường thẳng y = -2x.

b) Biện luận số giao điểm của đồ thị (P) với đường thẳng y = ax (D) theo a.

3) Vẽ đồ thị (P)

Bài 3 (3 điểm). Cho nửa đường tròn đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn đó người ta kẻ tiếp tuyến Ax và dây AC bất kì. Tia phân giác của góc CAx cắt nửa đường tròn tại D, các tia AD và BC cắt nhau tại E.

a) Tam giác ABE là tam giác gì? Tại sao

b) Các dây AC và BD cắt nhau tại K. Chứng minh EK vuông góc với AB.

c) Nếu $\sin\widehat{BAC} = \sqrt{2/3}$. Chứng minh KH (KH + 2EH) = 2HE.KE (H là giao điểm của EK và AB)

Bài 4 (1,5 điểm). Cho tam giác ABC vuông ở A. S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho SB ⊥ mp (ABC). Từ B hạ BK ⊥ SA (K ∈ SA)

a) Chứng minh BK ⊥ SC

b) Tìm điểm I cách đều 4 điểm S, A, B, C.

Hải Phòng, năm học 1996 - 1997

(Chuyên ban)

Lời giải

*Bài 1.*1) a) Với m = -1,45, có phương trình

$(2x^2 - x - 6)\sqrt{x+1,45} = 0$ (1)

phải có điều kiện $x \geq -1,45$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 6 = 0 \\ \sqrt{x+1,45} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 > -1,45 \\ x_2 = -1,5 < -1,45 \\ x_3 = -1,45 = -1,45 \end{cases}$$

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm x = 2; x = -1,45.

b) Giải và biện luận phương trình

$(2x^2 - x - 6)\sqrt{x-m} > 0$ (2).

Điều kiện tồn tại là $x \geq m$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 6 = 0 \\ \sqrt{x-m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1,5 \\ x_3 = m \end{cases}$$

x = m là một nghiệm với m ∈ **R**.

-1,5 2

(III) (II) (I)

$m \in$ (I) thì $m > 2$, phương trình (2) chỉ có một nghiệm $x = m$

$m \in$ (II) thì $-1,5 < m \leq 2$, phương trình (2) $\Leftrightarrow x_1 = 2; x_2 = m$.

$m \in$ (III) thì $m \leq -1,5$, phương trình (2) $\Leftrightarrow x_1 = 2$; $x_2 = m$; $x_3 = -1,5$.

2) $\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} - \left(\dfrac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2$

$$= \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)^2} - \left[\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{-(\sqrt{5}-2)}\right]^2$$

$$= \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3} - \left(\frac{\sqrt{5}}{-1}\right)^2 = 7-4\sqrt{3}-5 = 2-4\sqrt{3}.$$

Bài 2. 1) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ và $x_1 < x_2$, ta có:

$f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$

và $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$

vì $(x_1 + x_2) < 0$; $(x_1 - x_2) < 0$ suy ra $f(x_1) > f(x_2)$; hàm số nghịch biến.

Với $x_1 < 0 < x_2$ ta có: $f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = -x_2^2$

và $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

suy ra $f(x_1) > f(x_2)$, hàm số nghịch biến.

$\forall x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có: $f(x_1) = -x_1^2$, $f(x_2) = -x_2^2$ và $f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2) > 0$, vì $(x_1 + x_2) > 0$, $(x_2 - x_1) > 0$, hàm số nghịch biến.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) a) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$-x|x| = -2x$ (1)

(1) $\Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2$, vậy đồ thị (P) cắt $y = -2x$ tại 3 điểm: O(0; 0); M (2; -4); N (-2; 4).

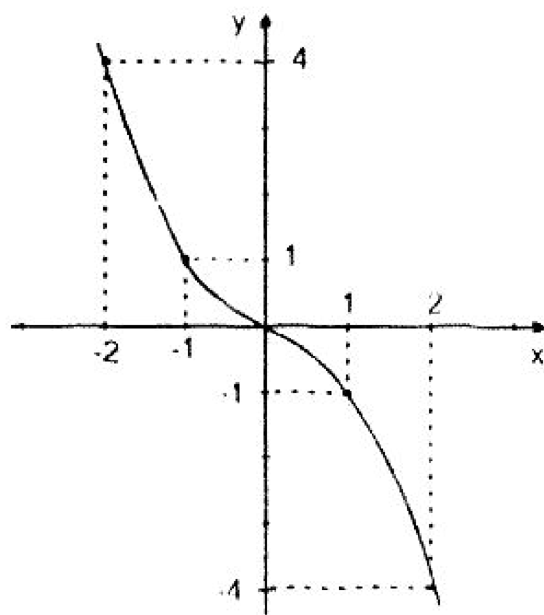
b) Tương tự với số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm của phương trình: $-x\,|x| = ax$ (2)

(2) $\Leftrightarrow x = 0\ \forall a$, $-|x| = a$ (*)

Phương trình (*) khi a = 0 thì (2) $\Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2$, y = ax tiếp xúc với đồ thị P.

Phương trình (*) khi a > 0 thì (*) vô nghiệm, y = ax cắt (P) tại 1 điểm

Phương trình (*) khi a < 0 thì (*) có hai nghiệm $x_1 = a$, $x_2 = -a$, y = ax cắt đồ thị (P) tại 3 điểm phân biệt.



3) Đồ thị của (P)

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-2	-1	0	1	2	...

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ khi } x < 0 \\ -x^2 \text{ khi } x > 0 \end{cases}$$

Bài 3. Hình 62

a) Vì $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (theo gt) nên $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$, suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ hay BD là phân giác của $\widehat{ABC}$.

$\widehat{ADB} =$ 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên BD ⊥ AE.

Trong ΔABE có BD vừa là phân giác, vừa là đường cao

nên ΔABE cân đỉnh B.

b) $\widehat{ACB}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AC \perp EB$.

ΔABE có hai đường cao BD và AC gặp nhau tại K do đó K là trực tâm của ΔABE suy ra $EH \perp AB$.

c) ΔACB vuông góc tại C có BK là tia phân giác trong của goc B nên:

H.62

$$\frac{KC}{KA} = \frac{BC}{AB} = \sin BAC = \sqrt{2/3}$$

Do ΔBAE cân tại đỉnh B nên $\frac{KH}{KE} = \frac{KC}{Ka} = \sqrt{2/3}$ suy ra

$$\frac{HK^2}{KE^2} = \frac{2}{3} \text{hay} \frac{KH^2}{KE^2 - KH^2} = \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$KH^2 = 2(KE - KH)(KE + KH) = 2(KE - KH).HE$

$= 2KE.HE - KH.HE$

$KH^2 - KH.HE = 2KE.HE$

$KH(KH - HE) = 2KE.HE$.

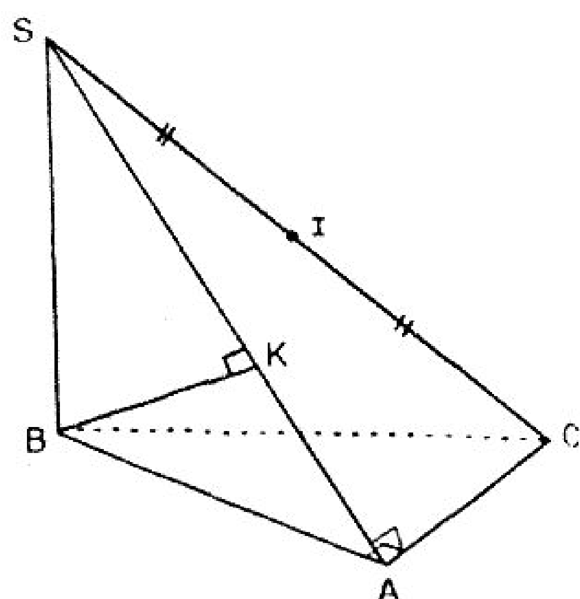
Bài 4. Hình 63

a) Theo giả thiết $SB \perp (ABC)$ suy ra $SB \perp AC$, $BA \perp AC$ (gt), do đó có $AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp SB$, $SA \perp SB$ (gt), vậy $SB \perp (SAC) \Rightarrow SB \perp SC$.

b) Trong tam giác vuông SBC nếu I là trung điểm của cạnh huyền SC ta có IS = IB = IC

Tương tự, trong tam giác vuông SAC, nếu I là trung điểm của cạnh huyền SC, ta có IS = IA = IC.

Vậy khi I là trung điểm của SC thì I cách đều S, B, A, C.



H.63

Đề 16

Bài 1 (2 điểm). 1) Trục căn thức ở mẫu số $\frac{12}{\sqrt{5}-2}$

2) Tính A = $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

3) Phân tích thành nhân tử biểu thức B = $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$

Bài 2 (2 điểm). Cho phương trình bậc hai (ẩn x, tham số m):

$x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (1)

1) Giải phương trình (1) khi m = 2

2) Định m để phương trình (1) có nghiệm kép

3) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu, khi đó 2 nghiệm mang dấu gì?

Bài 3 (2,5 điểm). Trong mặt phẳng toạ độ cho parabol (P): $y = ax^2$ và điểm M (1; 1) nằm trên (P).

1) Xác định hệ số a. Vẽ parabol (P)

2) Lấy điểm N trên parabol (P) có hoành độ $x_N = -2$, tính tung độ y_N. Viết phương trình đường thẳng MN.

3) Tìm A trên trục tung để ba điểm M, A, N thẳng hàng.

4) Một đương thẳng (D) qua A có hệ số góc m, đường thẳng (D) cắt parabol (P) tại hai điểm P, Q. Gọi P_1, Q_1 lần lượt là hình chiếu của P, Q trên trục hoành, chứng minh rằng: $OP_1.OQ_1 = OA$ (đơn vị trên hai trục toạ độ bằng nhau).

Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn tâm O, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của đoạn OA. Qua I vẽ dây cung MQ vuông góc với OA (M trên cung AC, Q trên cung AD). Đường thẳng vuông góc với MQ tại M cắt đường tròn (O) tại P.

1) Chứng minh rằng:

a) Tứ giác PMIO là hình thang vuông

b) Các điểm P, O, Q thẳng hàng

2) Gọi S là giao điểm của AP và CQ. Tính số đo góc CSP.

3) Gọi H là giao điểm của AP và MQ. Chứng minh rằng:

a) $MH.MQ = MP^2$.

b) MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác QHP.

Lâm Đồng, năm học 1996 - 1997

Lời giải

Bài 1. 1) Trục căn thức ở mẫu số

$$\frac{12}{\sqrt{5}-2}=\frac{12\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=\frac{12\left(\sqrt{5}+2\right)}{5-4}=12\left(\sqrt{5}+2\right)$$

2) Tính

$$A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1}+\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}$$

3) Phân tích thành nhân tử

$$B=ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1=b\sqrt{a}\,(\sqrt{a}+1)+(\sqrt{a}+1)$$

$$=\left(\sqrt{a}+1\right)\left(b\sqrt{a}+1\right).$$

Bài 2. 1) Giải phương trình (1) khi m = 2

$x^2 - 4x + 3 = 0$

Do a + b + c = 0 nên $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a} = 3$.

2) Phương trình có nghiệm kép khi có $\Delta' = 0$.

$\Delta' = m^2 - 2m + 1\ (m - 1)^2$; $\Delta' = 0$ khi m = 1

Vậy phương trình (1) có nghiệm kép khi m = 1

3) Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi có $\Delta >$ và $\frac{c}{a} > 0$, hai nghiệm mang dấu dương (hoặc âm) khi có $S > 0$ (hoặc $S < 0$). Do vậy, với phương trình đã cho, ta có:

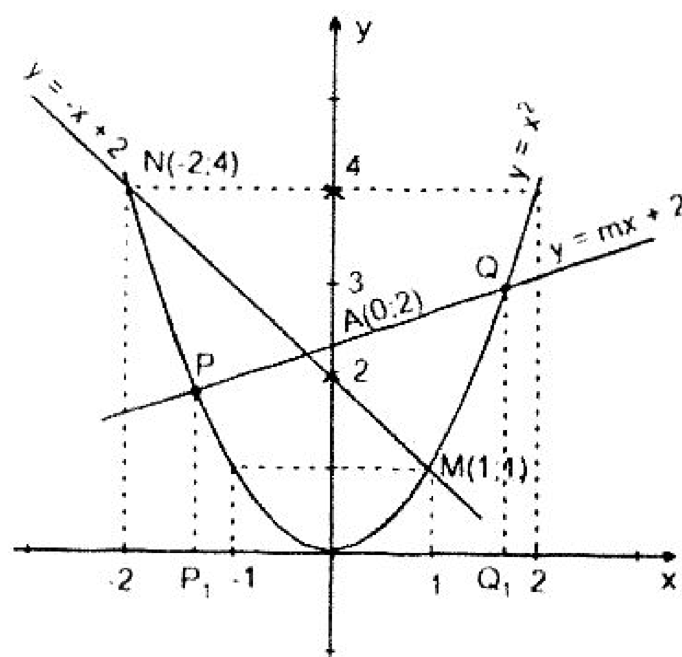
$\Delta' = m^2 - (2m - 1) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2$; $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

$\frac{c}{a} = \frac{2m-1}{1} = 2m - 1$; $\frac{c}{a} > 0$ khi $2m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$

$S = -\frac{b'}{a} = -\frac{-m}{1} = m$; do đó nếu $m \neq 1$, $m > \frac{1}{2}$ thì $m > 0$.

Vậy với $m \neq 1$, $m > \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu dương.

Bài 3. 1) Vì parabol (P) đi qua M (1; 1) nên có:



$1 = a.1^2 \Rightarrow a = 1$

Vậy khi P đi qua M (1; 1) ta có $y = x^2$

2) Khi hoành độ $x_N = -2$ thì $y = x^2 = (-2)^2 = 4$.

Đường thẳng $y = ax + b$ khi qua M, N, ta có:

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 4 = -2a + b \end{cases}$$

Trừ vế với vế của hai phương trình có: $-3 = 3a \Rightarrow a = -1$.

Khi $a = -1$ thì $b = 2$.

Vậy phương trình của đường thẳng MN là $y = -x + 2$.

3) Để ba điểm M, A, N thẳng hàng khi A (A trên trục tung) nằm trên MN, do đó có: y = -0 + 2, như vậy có toạ độ của A (0; 2).

4) Đường thẳng D với hệ số góc m có dạng y = mx + b và đi qua A (0; 2) nên có: 2 = m.0 + b tức là b = 2. Vậy đường thẳng D với hệ góc m đi qua A có dạng cụ thể là y = mx + 2.

Parabol $y = x^2$ và đường thẳng (D): y = mx + 2 cắt nhau tại hai điểm phân biệt P (x_p; y_p) và Q (x_Q; y_Q), hình chiếu của chúng trên trục hoành là P_1 (x_p; 0) và Q (x_Q; 0). Ta có đẳng thức sau:

$$\left.\begin{matrix} y_p = x_p^2 \\ y_p = mx_p + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_p^2 - mx_p - 2 = 0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{matrix} y_Q = x_Q^2 \\ y_Q = mx_Q + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_Q^2 - mx_Q - 2 = 0 \qquad (2).$$

Từ (1),(2) và do $x_p \neq x_Q$ chứng tỏ rằng x_p, x_Q là nghiệm của phương trình X^2 - mX - 2 = 0, suy ra:

$$|OQ_1.OP_1| = |x_Q.x_p| = \left|\frac{c}{a}\right| = \left|-\frac{2}{1}\right| = 2$$

Trên hình vẽ có OA = 2, vậy có $OQ_1.OP_1$ = OA.

Bài 4. Hình 64

1) a) Theo giả thiết, AI ⊥ MQ và MP ⊥ MQ nên IO // MP.

Tứ giác PMIO có IO // MP và $\widehat{IMP}$ = 1v nên là hình thang vuông.

b) Vì OA ⊥ MQ nên IM = IQ. Dễ thấy MIOK là hình chữ nhật nên IM = OK, do đó có OK = IQ.

Vì MIOK là hình chữ nhật nên $\widehat{OKM} = 1v$ hay $OC \perp MP$ suy ra KP = MK, nhưng MK = IO nên KP = IO.

Hai tam giác KPO và IOQ bằng nhau vì có OK = IQ, $\hat{K} = \hat{I} = 1v$, KP = IO, suy ra $\widehat{O_1} = \hat{P}$, nhưng $\hat{P}$ phụ với $\widehat{O_3}$ suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 1v$.

H.64

Ta có $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 2v$ suy ra P, O, Q thẳng hàng

2) Do $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$. Theo giả thiết thì MQ // CD nên $\overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{QD}$, từ đó suy ra $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AQ}$.

$\widehat{CSP}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn, nên sđ$\widehat{CSP} = \frac{1}{2}$sđ$(\overset{\frown}{AQ} + \overset{\frown}{CP})$ nhưng $\overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{CM}$, $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{QD}$ nên $\overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{QD}$, do đó sđ$\widehat{CSP} = \frac{1}{2}$sđ$\left(\overset{\frown}{AQ} + \overset{\frown}{QD}\right) = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$, nên $\widehat{CSP} = 45^o$.

3) a) Vì POQ là đường kính nên PCMAQ là cung nửa đường tròn và biết $\widehat{CSP} = 45^o$ nên tổng hai cung CP và AQ có số đo bằng 90^o, từ đó suy ra cung CMA cũng có số đo bằng 90^o. Lại biết $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AQ}$, từ các kết quả trên suy ra $\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{AQ}$.

Vì ◺MHP ∽ ◺MPQ (do có sđ $\widehat{MPH} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{MA}$,

sđ $\widehat{MQP} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MP}$ và $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MP}$).

nên $\frac{MH}{MP} = \frac{MP}{MQ}$ hay MH.MQ = MP^2

b) Theo chứng minh trên có $\widehat{HQP} = \widehat{MPH}$, hai góc này cùng chắn cung PH của đường tròn ngoại tiếp ΔQHP, từ đó suy ra MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔQHP.

Đề 17

Bài 1 (2 điểm). 1) Cho A = $\sqrt{x-2}$

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.

b) Tìm x sao cho A = 4

2) Giải phương trình: $x^2 - 5x + 4 = 0$

Bài 2 (3 điểm). Trong cùng hệ trục toạ độ, cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng (D): $y = kx + b$

1) Tìm k và b biết rằng (D) qua hai điểm A (1; 0) và B (0; -1).

2) Tìm a biết rằng (P) tiếp xúc với (D) vừa tìm được ở câu 1).

3) Vẽ (D) và (P) vừa tìm được ở câu 1) và 2).

4) Gọi (d) là đường thẳng qua điểm C($\frac{3}{2}$; -1) và có hệ số góc là m.

a) Viết phương trình của (d).

b) Chứng tỏ rằng qua điểm C có hai đường thẳng (d)

tiếp xúc (P) (ở câu 2) và vuông góc với nhau.

Bài 3 (2 điểm). Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính AB, CD.

1) Chứng minh rằng ACBD là hình chữ nhật.

2) Hai đường kính AB, CD phải có vị trí tương đối nào để ACBD là hình vuông?

3) Trong tất cả các hình chữ nhật ACBD nội tiếp trong đường tròn (O; R) tìm hình có diện tích lớn nhất và tính diện tích ấy theo R.

Bài 4 (3 điểm). Cho điểm I trên đường tròn (O; R), đường trung trực của bán kính OI cắt đường tròn tại A và B.

1) Tính độ dài AB theo R.

2) Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau tại C. Chứng minh rằng: ba điểm O, I, C thẳng hàng, tam giác ABC đều, I là tâm của đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC.

3) Tính theo R diện tích phần của tam giác ABC nằm ngoài hình trong (O,R).

Thành phố Hồ Chí Minh, năm học 1996 - 1997

Lời giải

Bài 1. 1/a) A có nghĩa khi và chỉ khi $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

b) $A = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

2) $x^2 - 5x + 4 = 0$ có dạng $a + b + c = 0$

nên $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a} = 4$.

Bài 2. 1/ Vì A (1 ; 0) $\in$ (D) nên có: $0 = k.1 + b$ hay $k + b = 0$ (1) và B (0; -1) $\in$ (D) nên có: $-1 = k.0 + b$ hay $b = -1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $k = 1$.

Vậy khi (D) qua A và B thì $k = 1$ và $b = -1$, có (D): $y = x - 1$.

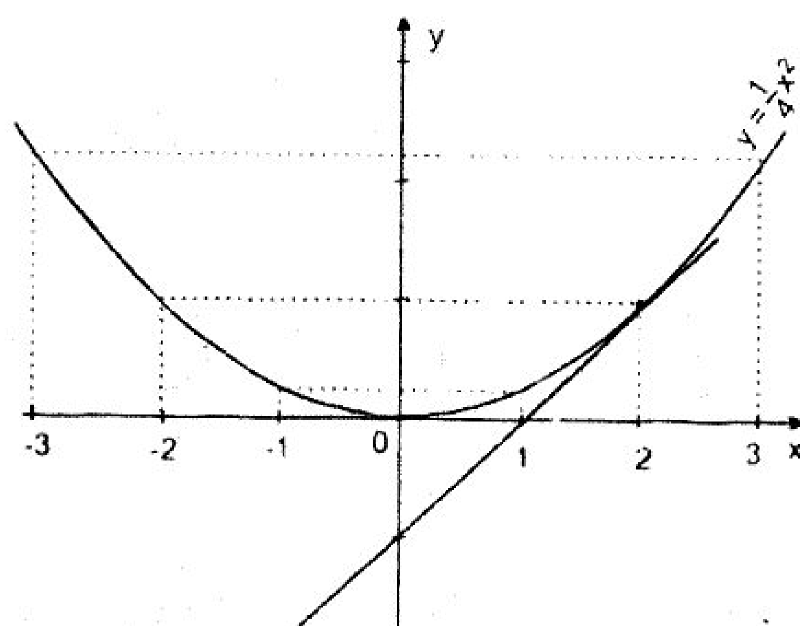
2) (P) tiếp xúc với (D) khi và chỉ khi phương trình $ax^2 = x - 1$ hay $ax^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm kép.

Ta có $\Delta = 1 - 4a$; $1 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

3) Vẽ đồ thị của (P) và (D)

x	...	-4	-2	-1	0	1	2	4	...
$y = \frac{1}{x}x^2$	...	-4	-2	-1	0	$\frac{1}{4}$	1	4	...

x	0	1
y	-1	0



4) a) Đường thẳng (d) có hệ số góc là m có dạng:

(d): $y = mx + b$

$C\left(\frac{3}{2};-1\right) \in$ (d) nên có $-1 = m\cdot\frac{3}{2} + b \Rightarrow -\frac{3}{2}m - 1$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) là: $y = mx - \frac{3}{2}m - 1$.

b) Đường thẳng (d) và (P) tiếp xúc với nhau khi phương trình hoành độ $\frac{1}{4}x^2 = mx - \frac{3}{2}m - 1$ có nghiệm kép.

$\frac{1}{4}x^2 = mx - \frac{3}{2}m - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 6m + 4 = 0$

$\Delta' = (2m)^2 - 6m - 4$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m_1 = 2;\ m_2 = -\frac{1}{2}$

Ở đây đường thẳng (d) có dạng sau:

(d_1): $y_1 = 2x - 4$

(d_2): $y_2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

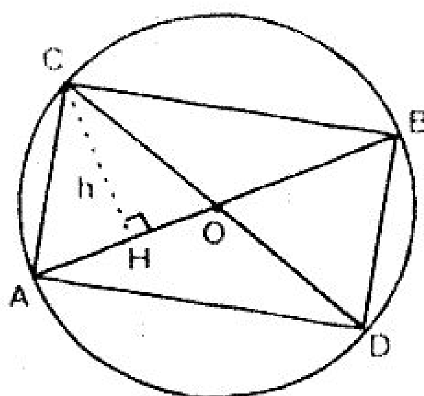
Vì (d_1) và (d_2) có tích hai hệ số góc bằng -1 (vì $2.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$) nên $d_1 \perp d_2$.

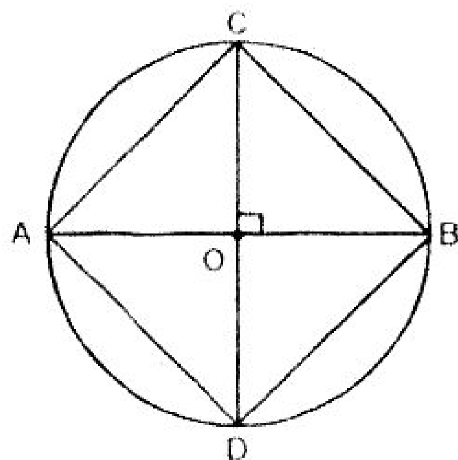
Bài 3. Hình 65

1) ACBD có OA = OB, OC = OD nên là hình bình hành. Hình bình hành ACBD có AB = CD (=2R) nên là hình chữ nhật.

2) Hình chữ nhật ACBD sẽ trở thành hình vuông nếu có AB ⊥ CD. Vậy khi hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau thì ACBD sẽ là hình vuông.

3) Trong tam giác ACB hạ $CH \perp AB$ ta có $CH = h < OC = R$. (vì trong tam giác vuông CHO ta luôn có $CH < OC$).





H.65

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}CH.AB = \frac{1}{2}h.2R$ suy ra $S_{ACBD} = 2hR$.

Vì tam giác COB vuông cân nên $CB = R\sqrt{2}$ do đó hình vuông ACBD có diện tích là

$S_{ACBD\ vuông} = R\sqrt{2}.R\sqrt{2} = 2R^2$.

Vì $h < R$ nên $2hR < 2R^2$, như vậy trong tất cả các hình chữ nhật ACBD nội tiếp đường tròn (O, R) hình có diện tích lớn nhất là hình vuông (vì hình vuông là một hình chữ nhật đặc biệt) và có diện tích theo R là $S = 2R^2$.

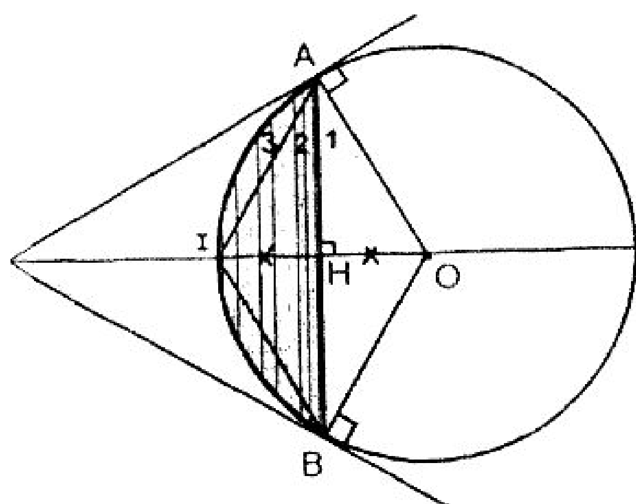
Bài 4. Hình 66

1) Vì AB là đường trung trực của OI nên AO = AI, nhưng AO = OI = R nên ΔAIO đều.

Trong tam giác đều AIO thì đường cao AH được tính theo công thức: $AH = \frac{OA\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Do $OI \perp AB$ nên $AH = HB$ suy ra $AB = 2AH = R\sqrt{3}$.

2) Dễ dàng chứng minh được IAOB là hình thoi do đó có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (theo tính chất của hình thoi), nhưng CA là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) nên $\widehat{OAC} = 90^\circ$, từ đó có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = 30^\circ$ suy ra AI là phân giác $\widehat{CAB}$, tương tự BI là phân giác của $\widehat{CBA}$.



H.66

CO là tia phân giác của góc do hai tiếp CA, CB tạo thành, CI là đường phân giác thứ ba của ΔACB do đó C, I, O thẳng hàng.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm đến đường tròn ta có CA = CB hay ΔCAB cân. Ta có $\widehat{CAB} = \widehat{A_3} + \widehat{A_2} = 60^\circ$ nên ΔCAB đều.

Vì I là giao điểm của 3 đường phân giác trong của ΔBAC nên I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC.

3) Khi lấy diện tích tam giác đều ABC trừ đi diện tích hình gạch sọc ta được diện tích của ΔABC nằm ngoài đường tròn (O ; R).

Do ΔABC đều có $AB = R\sqrt{3}$ nên $CH = \dfrac{\dfrac{R\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R}{4}$.

vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CH.AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{3R}{4}\cdot R\sqrt{3} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$

Do $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 60^o$ suy ra $\widehat{AOB} = 120^o$.

$$S_{quạtOAIB} = \frac{\pi R^2.120^o}{360^o} = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{gạch\ sọc} = S_{quạtOAIB} - S_{\Delta AOB} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Gọi S^* là phần diện tích ΔABC nằm ngoài hình tròn, ta có:

$$S^* = S_{\Delta ABC} - S_{gạch\ sọc} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi R^2}{3} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{9R^2\sqrt{3} + 6R^2\sqrt{3} - 8\pi R^2}{24} = \frac{15R^2\sqrt{3} - 8\pi R^2}{24}$$

$$= \frac{R^2\left(15\sqrt{3} - 8\pi\right)}{24}.$$

Đề 18

Bài 1 (3,5 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

2) Cho biểu thức $B = \dfrac{|x|}{1 + \sqrt{1 - |x|}}$

a) Tìm x để B có nghĩa;

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức B.

Bài 2 (2,5 điểm)

Cho phương trình $x^2 + (2m - 5)x - n = 0$ (x là ẩn)

1) Giải phương trình khi m = 1 và n = 4;

2) Tìm m và n để phương trình có hai nghiệm là 2 và - 3;

3) Cho m = 5. Tìm n nguyên nhỏ nhất để phương trình có nghiệm dương.

Bài 3 (4 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau ở H. Kéo dài AO cắt đường tròn tại M. Chứng minh:

1) MK//BC;

2) DH = DK;

3) HM đi qua trung điểm I của BC;

4) $\dfrac{AD}{HD} + \dfrac{BE}{HE} + \dfrac{CF}{HF} \geq 9$

Hà Nam, năm học 1999 - 2000

Lời giải

Bài 1. 1) Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}+1)^2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -4$$

2)a) Biểu thức B có nghĩa khi $\begin{cases}1+\sqrt{1-|x|}\neq 0\\ 1-|x|\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

b) $B = \frac{|x|}{1+\sqrt{1-|x|}} = \frac{|x|\cdot\left(1-\sqrt{1-|x|}\right)}{1-\left(1-|x|\right)} = 1-\sqrt{1-|x|}$ với $|x| \geq 0$

Do $0 \leq |x| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -|x| \geq -1 \Rightarrow 1 \geq 1 - |x| \geq 0 \Rightarrow$ $1\geq\sqrt{1-|x|}\geq 0 \Rightarrow -1\leq -\sqrt{1-|x|}\leq 0 \Rightarrow 0\leq 1-\sqrt{1-|x|}\leq 1$ hay $0 \leq B \leq 1$.

Vậy minB = 0 khi $1=\sqrt{1-|x|} \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

maxB = 1 khi $1-\sqrt{1-|x|} = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

*Bài 2.*1) Khi m = 1 và n = 4, phương trình đã cho có dạng $x^2 - 3x - 4 = 0$. Vì a - b + c = 0 nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$.

2) Khi x = 2 phương trình đã cho có dạng 4m - 6 - n = 0.

Khi x = -3 phương trình đã cho có dạng -6m + 24 - n = 0.

Từ đó, có hệ hai phương trình bậc nhất với ẩn là m, n sau:

$$-\begin{cases}4m-6-n=0\\ -6m+24-n=0\end{cases}$$
$$\overline{\quad 10m-30=0 \quad}$$

suy ra m = 3; n = 6.

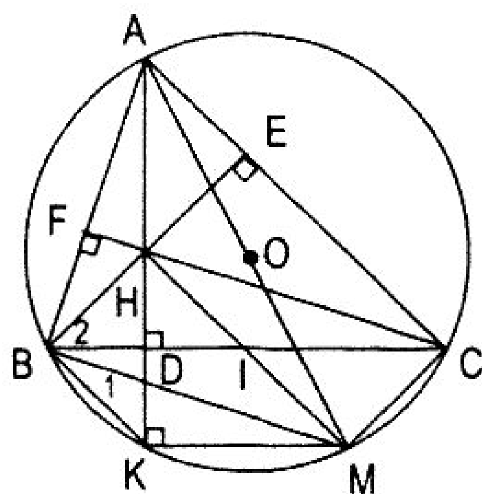
3) Cho m = 5, phương trình đã cho có dạng

$x^2 + 5x - n = 0(*)$

Nếu a và c khác dấu thì phương trình này luôn có hai nghiệm trái dấu. Do đó muốn phương trình (*) có nghiệm dương thì phải có $\frac{c}{a} < 0$ có nghĩa là $-n < 0$ hay $n > 0$.

Vậy với n = 1 là số nguyên nhỏ nhất thì phương trình (*) có nghiệm dương.

Bài 3. Hình 67



H.67

1) Ta có $\widehat{AKM} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) do đó $MK \perp AK$, $BC \perp AK$ (gt) nên $MK // BC$.

2) Ta có $\widehat{KAC} = \widehat{B_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC), $\widehat{KAC} = \widehat{B_2}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), do đó có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ hay BD là phân giác của HBK.

ΔHBK có $BD \perp HK$, BD lại là phân giác nên ΔHBK cân, suy ra BD cũng là trung tuyến, vậy DH = DK.

3) Ta có $\widehat{ABM} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $MB \perp AB$, $CF \perp AB$ (theo gt), do đó, MB//CH. Chứng minh tương tự có MC//BH.

Tứ giác BHCM có MB//CH và MC//BH nên là hình bình hành, suy ra HM phải đi qua trung điểm I của BC (theo tính chất của hình bình hành).

4) Ta có các nhận xét như sau:

a) $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

Thật vậy $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC} + \frac{\frac{1}{2}HE.AC}{\frac{1}{2}BE.AC} + \frac{\frac{1}{2}HF.AB}{\frac{1}{2}CF.AB}$

$$= \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

b) Nếu với x > 0, y> 0, z > 0 thì có

$$(x + y + z).\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Thật vậy:

$$(x + y + z)\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right)$$

$$= 3 + \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{x^2 + z^2}{xz} + \frac{z^2 + y^2}{yz} \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

Từ đó có $\left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}\right)\left(\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF}\right) \geq 9$ với chú ý rằng $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$ và $\frac{1}{\frac{HD}{AD}} = \frac{AD}{HD}, \frac{1}{\frac{HE}{BE}} = \frac{BE}{HE}, \frac{1}{\frac{HF}{CF}} = \frac{CF}{HF}$.

II. ĐỀ TOÁN THI TỐT NGHIỆP THCS(*)

Đề 19

A. Lí thuyết (2 điểm). Học sinh chọn một trong hai đề sau:

Đề 1. Phát biểu tính chất cơ bản của phân thức đại số. Các đẳng thức sau đây là đúng hay sai, vì sao?

$$\frac{3(x^2+1)}{x^2+1}=3; \qquad \frac{5m-25}{15-5m}=\frac{m-5}{m-3}$$

Đề 2. Chứng minh rằng, nếu cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

B. Bài toán bắt buộc (8 điểm)

Bài 1.(2,5 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1-\dfrac{x+4}{x+\sqrt{x}+1}\right)$

1) Rút gọn P;

2) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên dương.

(*). Trong vài năm qua, theo chủ trương của Bộ Giáo dục và Đào tạo thì việc tuyển sinh vào lớp 10 hàng năm sẽ do các tỉnh chọn lựa một trong hai cách: Dựa vào điểm thi tốt nghiệp THCS để tuyển sinh hoặc thông qua việc thi tuyển với hai môn Văn - Toán để tuyển sinh vào lớp 10.

Bài 2. (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Một người dự định đi xe đạp từ địa điểm A tới địa điểm B cách nhau 36km trong một thời gian nhất định. Sau khi đi được nửa quãng đường, người đó dừng lại nghỉ 18 phút. Do đó, để đến B đúng hẹn, người đó đã tăng vận tốc thêm 2km một giờ trên quặng đườn còn lại. Tính vận tốc ban đầu và thời gian xe lăn bánh trên đường.

Bài 3 (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F.

1) Chứng minh tứ giác AEHF là hình chữ nhật;

2) Chứng minh AE.AB = AF.AC;

3) Đường thẳng qua A vuông góc với EF cắt cạnh BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của đoạn BC;

4*) Chứng minh rằng nếu diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích hình chữ nhật AEHF thì tam giác ABC vuông cân.

Thi tốt nghiệp PTCS năm học 1998 - 1999

Hà Nội

Lời giải

I. Lí thuyết: xem SGK

II. Bài toán

Bài 1

1) $$P = \frac{2x+1-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} : \frac{x+\sqrt{x}+1-(x+4)}{x+\sqrt{x}+1}$$

(điều kiện $x > 0, x \neq 1$)

$$= \frac{x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$$

2) Ta có thể viết P như sau:

$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x} - 3}$ với điều kiện $\sqrt{x} - 3 > 0$ tức là $x > 9$.

Muốn P nguyên dương thì $\frac{3}{\sqrt{x} - 3}$ phải nguyên dương, do đó $\sqrt{x} - 3$ phải là ước nguyên của 3, tức là $\sqrt{x} - 3$ phải bằng 1 hoặc 3.

Với $\sqrt{x} - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$, thỏa mãn điều kiện $x > 9$.

Với $\sqrt{x} - 3 = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 36$, thỏa mãn điều kiện $x > 9$.

Vậy với $x = 16$, $x = 36$ thì $P = 4$; $P = 2$.

Bài 2. Gọi vận tốc ban đầu của xe đạp là x km/h ($x > 0$).

Thời gian xe đi nửa quãng đường AB là $\frac{18}{x}$h và thời gian đi nửa quãng đường sau là $\frac{18}{x + 2}$h. Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{18}{x} + \frac{18}{x + 2} + \frac{18}{60} = \frac{36}{x} \text{ hay } \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{60} = \frac{2}{x}$$

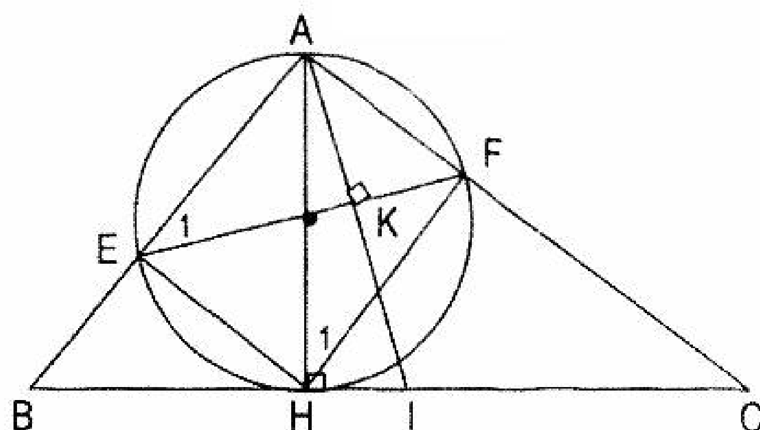
Biến đổi phương trình được $x^2 + 2x - 120 = 0$

Giải ra được $x_1 = 10$; $x_2 = -12$ (loại).

Sau khi thử lại, có kết quả: Vận tốc ban đầu của xe đạp là 10km/h và thời gian xe lăn bánh là $\frac{18}{10} + \frac{18}{12} = 3\frac{3}{10}$(h) hay 3 giờ 18 phút.

Bài 3. Hình 68

1) Ta có $\hat{A} = 1v$ (theo gt), $\hat{E} = \hat{F} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).



H.68

Tứ giác AEHF có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

2) Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{H_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AF) mà $\hat{H}_1 = \hat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) suy ra $\hat{E}_1 = \hat{C}$. Vậy hai tam giác vuông AEF và ACB đồng dạng, suy ra $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ hay AE.AB = AF.AC.

3) Gọi K là giao điểm của AI và EF ta có $\hat{E}_1 + \widehat{EAK} = 90^o$, vì $\widehat{AKE} = 90^o$ do AI ⊥ EF, mặt khác có $\hat{B} + \hat{C} = \hat{B} + \widehat{E_1} = 90^o$, suy ra $\hat{B} = \widehat{EAK}$, vậy ΔIAB cân nên IA = IB (1).

Chứng minh tương tự có ΔIAC cân nên IA = IC (2). Từ (1) và (2) suy ra IB = IC tức là I là trung điểm của BC.

4*) Theo giả thiết thì $S_{ABC} = 2S_{AEHD}$, nhưng $S_{AEHD} = 2S_{AFE}$ nên $S_{ABC} = 4S_{AFE}$.

Do hai tam giác AEF và ACB đồng dạng nên $\frac{S_{ACB}}{S_{AEF}} = \left(\frac{BC}{FE}\right)^2 = 2^2$, suy ra $FE = \frac{1}{2}BC = AI$. Nhưng FE = AH (vì AEHD là hình chữ nhật) nên FE = AI = AH.

Nhận thấy: đường cao AH bằng trung tuyến AI chỉ khi tam giác ABC cân. Vậy nếu $S_{ABC} = 2S_{AEHD}$ thì tam giác ABC sẽ vuông cân.

Đề 20

I. Lí thuyết (2 điểm) Thí sinh chọn một trong hai câu sau đây:

1) Chứng minh định lí: Với mọi số thực a thì $\sqrt{a^2} = |a|$.

Áp dụng: Tính $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$ và $\sqrt{(-3)^2}$

2) Phát biểu và chứng minh định lí về tổng số đo hai góc đối diện của một tứ giác nội tiếp đường tròn.

Phát biểu phần đảo của định lí trên.

II. Bài toán (bắt buộc)

Bài 1.(1,5 điểm) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2}{2}$ (P) và đường thẳng (D): y = 2x trên cùng một hệ trục tọa độ.

Bài 2 (1,5 điểm). Giải các phương trình:

a) $x^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$;

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Bài 3 (1 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Bài 4 (1 điểm). Rút gọn các biểu thức sau:

$A = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$;

$B = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài 5 (3 điểm). Cho đường tròn (O) có đường kính BC. Lấy điểm A trên đường tròn (O) khác B và C. Trên đoạn OC lấy điểm D và từ D vẽ đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại I, K và cắt đường thẳng BA, AC lần lượt tại E và F. Đường thẳng CE cắt

đường tròn (O) tại J.

a) Chứng minh D là trung điểm của IK;

b) Chứng minh FA. FC = FE.FD;

c) Chứng minh ba điểm B, F, J thẳng hàng;

d) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng EF tại M. Chứng minh M là trung điểm của EF.

Thi tốt nghiệp PTCS năm học 1998 - 1999

Thành phố Hồ Chí Minh

Lời giải

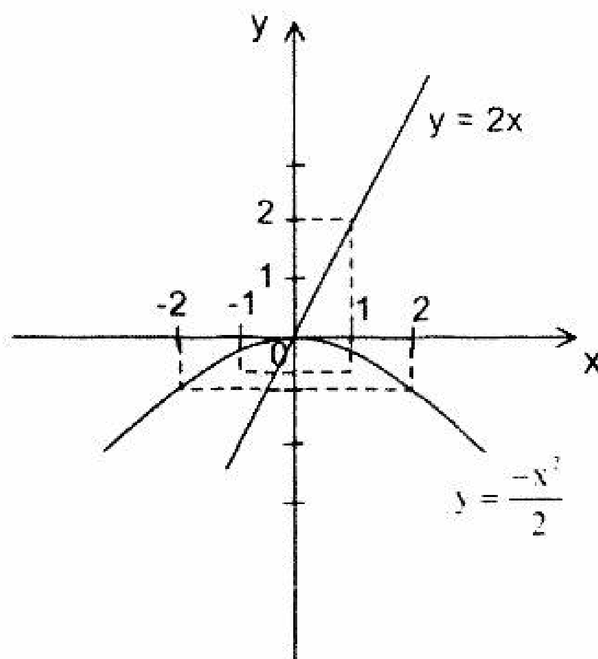
I. Lí thuyết

II. Bài toán

Bài 1. Lập bảng giá trị của hai hàm số đã cho:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	-2	

x	0	1
y	0	2



Đồ thị hai hàm số như hình vẽ trên.

Bài 2. a) Ta có: $\Delta = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 - 4.2\sqrt{3}$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$$

Vậy $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2} = 2;\ x_2 = \dfrac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

b) Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có phương trình trung gian

$$y^2 - 8y - 9 = 0.$$

Ta có $\Delta' = 16 + 9 = 25 = 5^2$.

$y_1 = 4 + 5 = 9;\ y_2 = 4 - 5 = -1$ (loại)

Vậy $x^2 = y = 9 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3$.

Bài 3. Rút y từ phương trình thứ hai, có $y = 2x - 1$. Thay giá trị của y vào phương trình thứ nhất, có:

$3x - 2(2x - 1) = 2$, giải ra được $x = 0$.

Ta có $y - 2x - 1 = 2.0 - 1 = -1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x = 0;\ y = -1)$.

Bài 4. $A = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3-2\sqrt{2}} = \dfrac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{9-8} = 6$

$$B = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 1} + \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} + 1}$$

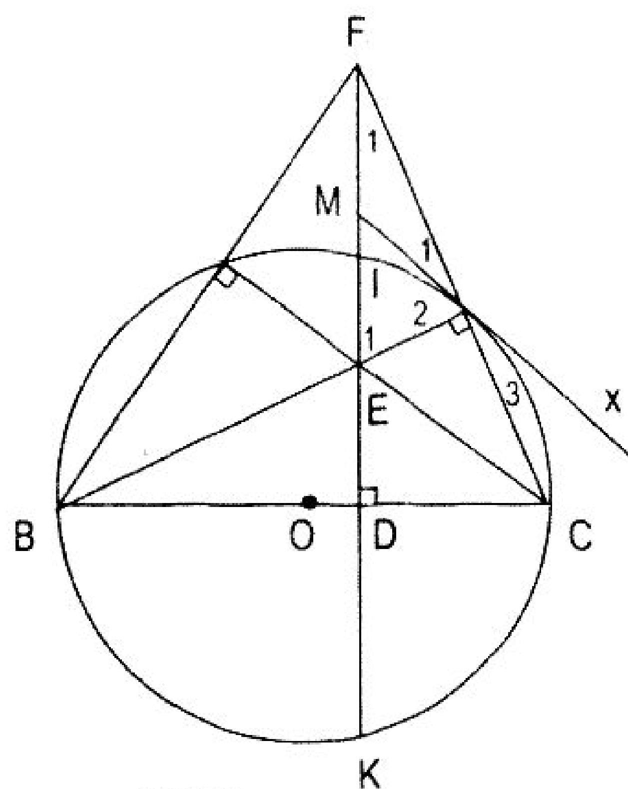
$$= \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$$

Bài 5. Hình 69.

a) Ta có $IK \perp OC$ (theo gt) hay $OC \perp IK$ suy ra $DI = DK$ (tính chất đối xứng của đường tròn).

b) Ta có $\widehat{BAC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Hai tam giác vuông FAE và FDC có chung góc nhọn F_1 nên chúng đồng dạng suy ra $\dfrac{FA}{FD} = \dfrac{FE}{FC}$ hay $FA.\ FC = FE\ .\ FD$.

c) Ta có $\widehat{BJC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Tam giác FBC có hai đường cao là FD, BA cắt nhau tại E thì CJ phải là đường cao thứ ba (vì trong một tam giác ba đường cao đồng quy) suy ra $\widehat{CJF} = 1v$.



H.69

Ta thấy $\widehat{BJC} + \widehat{CJF} = 2v$, do đó B, F, J thẳng hàng.

d) Tiếp tuyến Ax cắt EF tại M. Ta có $\widehat{A_3} = \widehat{A_1}$ (góc đối đỉnh)

$$\text{sđ } \widehat{A_3} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AC} \ (1)$$

$\text{sđ } \widehat{F_1} = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{KC} - \overset{\frown}{IA})$, nhưng $\overset{\frown}{KC} = \overset{\frown}{IC}$ (vì $OC \perp IK$), nên

$$\text{sđ } \widehat{F_1} = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{IC} - \overset{\frown}{IA}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AC} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_3} = \widehat{F_1}$, nhưng $\widehat{A_3} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{F_1} = \widehat{A_1}$ hay ΔFMA cân, do đó MF = MA (3).

Ta lại có $\widehat{F_1} + \widehat{E_1} = 1v$, $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 1v$ và $\widehat{F_1} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{A_2}$ hay ΔMEA cân, do đó ME = MA (4)

Từ (3) và (4) suy ra MF = ME hay M là trung điểm của EF.

Đề 21

I. Lí thuyết (2 điểm) Học sinh chọn một trong hai câu.

*Câu 1.*a) Hãy viết định nghĩa hàm số bậc nhất. Nêu cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

b) Áp dụng: Vẽ đồ thị hàm số y = 2x - 3.

Câu 2. a) Hãy viết định nghĩa tiếp tuyến của đường tròn.

b) Chứng minh: Nếu một đường thẳng vuông góc với bán kính tại mút nằm trên đường tròn thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.

II. Bài toán (8 điểm) Bắt buộc cho mọi học sinh.

Bài 1.(2 điểm)

a) Tính $\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{75}$

b) Cho $M=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}-1}{x-2}$ với x ≠ 2

+ Rút gọn biểu thức M;

+ Tính giá trị của biểu thức M tại giá trị $x=5\sqrt{2}$.

Bài 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$.

b) Chứng minh đường cong (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình y = 2(m + 1)x - 2m + 4 (x là đối số, m ∈ R) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

c) Chứng minh rằng biểu thức $A=x_1\left(1-\dfrac{x_2}{2}\right)+x_2\left(1-\dfrac{x_1}{2}\right)$ không phụ thuộc vào m, trong đó x_1, x_2 là hoành độ các

giao điểm của đường cong (P) có phương trình $y = x^2$ với đường thẳng (d) có phương trình $y = 2(m + 1)x - 2m + 4$.

Bài 3. (4 điểm)

Cho đường tròn tâm O và M là điểm bất kì trên đường tròn. Trên tiếp tuyến của đường tròn tại M lấy điểm T. Đường thẳng TO cắt đường tròn tại C và D (C nằm giữa T và O). Hạ CA vuông góc với TM tại A và DB vuông góc với TM tại B.

a) Chứng minh CA//OM và MA = MB;

b) Chứng minh $AC.BD = AM^2$;

c) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống TO. Xác định tâm đường tròn quanh điểm A, B, H.

d) Biết MA = a. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đáy là hình tròn tâm là điểm A, bán kính đáy có độ dài là a và đường cao có độ dài là 2a.

Thi tốt nghiệp PTCS năm học 1998 - 1999

Hải Phòng

Lời giải

I. Lí thuyết: Xem SGK

II. Bài toán

Bài 1. a) $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{75} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

b) $M = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2} - 1}{x - 2} = \dfrac{|x - 1| - 1}{x - 2}$

- Nếu $x \geq 1$ và $x \neq 2$ thì M = 1.

- Nếu x < 1 thì $M = \frac{x}{2-x}$

Do $x = 5\sqrt{2} > 1$ nên có ngay giá trị của M = 1.

*Bài 2.*a) Ta có a + b + c = 0 (hoặc tính $\Delta = 9$), do đó phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a} = 4$.

b) Đường cong (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m nếu phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Thật vậy, $\Delta' = m^2 + 5 > 0$ với mọi m.

c) Biểu thức A có thể viết:

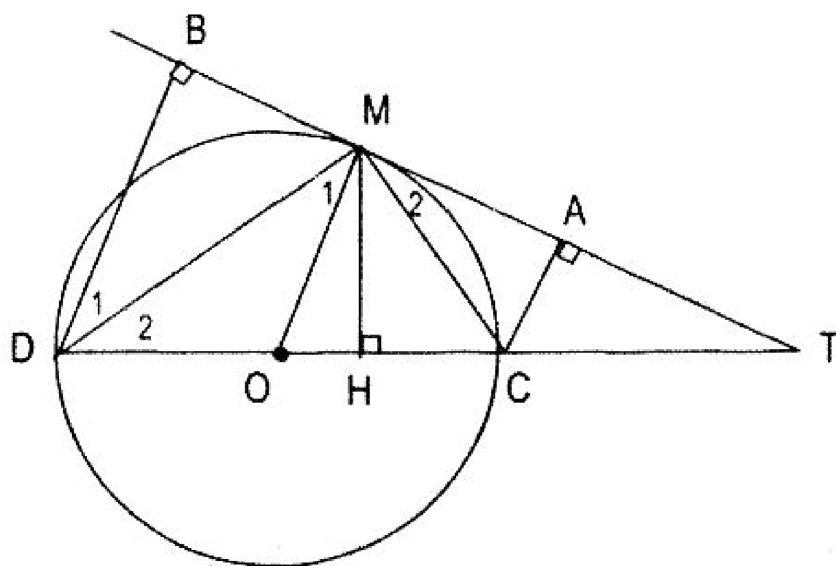
$$A = x_1 - \frac{x_1x_2}{2} + x_2 - \frac{x_1x_2}{2} = x_1 + x_2 - x_1x_2$$

$= 2(m + 1) - 2m + 4 = 6$, không phụ thuộc vào m.

Bài 3. Hình 70

a) Ta có CA ⊥ TB (theo gt) và OM ⊥ TB (tính chất của tiếp tuyến), suy ra CA//OM (vì cùng vuông góc với TB).

Tứ giác ABDC có CA//DB (cùng vuông góc với TB) là hình thang. Lại có OD = OC (bán kính), OM//CA (chứng minh trên), suy ra OM là đường trung bình của



H.70

hình thang. Vậy MA = MB.

b) Ta có $\widehat{D_1} = \widehat{M_1}$ (so le trong), $\widehat{M_1} = \widehat{D_2}$ (ΔODM cân),, mà $\widehat{D_2} = \widehat{M_2}$ (góc nội tiếp và góc do tia tiếp tuyến MT và dây MC cùng chắn cung MC), suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{M_2}$.

Xét hai tam giá vuông BMD và ACM đồng dạng vì có góc nhọn $\widehat{D_1} = \widehat{M_2}$, ta có:

$\frac{BM}{DB} = \frac{AC}{AM}$ hay BM . AM = AC.BD.

Từ đó có $AC.BD = AM^2$ (vì AM = BM)

c) ΔBMD = ΔHMD vì là hai tam giác vuông có cạnh huyền DM chung và $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$, suy ra MB = MH. Mà MB = MA nên ta có MA = MB = MH.

Vậy M là tâm đường tròn qua ba diểm A, B, H.

d) Gọi S là đỉnh hình nón thì diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy MA và đường sinh SA là:

$Sxq = \pi R\ell = \pi.MA.SA$

Xét tam giác vuông SMA có $SA^2 = SM^2 + MA^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$.

Từ đó $SA = a\sqrt{5}$. Vậy $Sxq = \pi a.a\sqrt{5} = \pi a^2\sqrt{5}$.

Đề 22

I. Lí thuyết (2 điểm) Học sinh chọn một trong hai đề sau:

Đề 1. a) Nêu định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn,

viết công thức tính nghiệm của phương trình bậc hai đó.

a) Áp dụng: Tìm nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Đề 2. a) Chứng minh định lí: "Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện nhau bằng hai góc vuông".

b) Phát biểu định lí đảo của định lí trên.

II. Bài toán bắt buộc (8 điểm)

Bài 1. (2 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} + \frac{1}{1+\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

điều kiện $a > 0$, $a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Bài 2.(2 điểm) Một xe máy đi từ bưu điện Phủ Lí đến bưu điện Hà Nội, quãng đường dài 60km. Sau khi xe máy đi được 20 phút thì một ô tô cũng đi từ bưu điện Phủ Lí đến bưu điện Hà Nội (hai xe đi trên cùng một đường). Tính vận tốc của mỗi xe biết rằng cả hai xe đến nơi cùng một lúc và xe ô tô đi nhanh hơn xe máy mỗi giờ 15km.

Bài 3.(4 điểm) Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn. Trên đường chéo AC ta lấy một điểm M khác với điểm O, đường thẳng BM cắt đường tròn O tại N. Đường thẳng vuông góc với AC tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P.

a) Chứng minh tứ giác OMNP là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh BN song song với OP.

c) Giả sử cạnh hình vuông đã cho bằng a. Tính BM.BN theo a.

d) Từ O vẽ Ox vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên Ox lấy điểm K, gọi H là trực tâm của tam giác KBC. Chứng minh OH vuông góc với mặt phẳng (KCB).

Thi tốt nghiệp PTCS năm học 1998 - 1999

Hà Nam

Lời giải

I. Lí thuyết: Xem SGK

II. Bài toán

*Bài 1.*a) Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} + \frac{1}{1+\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

điều kiện a > 0; a ≠ 1

$$A = \frac{1+\sqrt{a}+1-\sqrt{a}}{1-a} : \frac{1+\sqrt{a}-1+\sqrt{a}}{1-a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$= \frac{2}{1-a} \cdot \frac{1-a}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{3}{2\sqrt{a}}.$$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi:

$$a = 3 + 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2}.1 + 1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \sqrt{2} + 1$$

$$A = \frac{3}{2\sqrt{a}} = \frac{3}{2\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{2(2-1)} = \frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$$

Bài 2. Gọi vận tốc của xe máy là xkm/h (x > 0) thì thời gian xe đi từ bưu điện Phủ Lí đến bưu điện Hà Nội là $\frac{60}{x}$h.

Biết rằng ô tô đi nhanh hơn xe máy mỗi giờ là 15km, nên vận tốc của ô tô là (x + 15)km/h, do đó thời gian ô tô đi từ bưu điện Phủ Lí đến bưu điện Hà Nội là $\frac{60}{x+15}$h.

Vì xe ô tô đi sau xe máy 20 phút hay $\frac{1}{3}$giờ, mà hai xe lại đến nơi cùng một lúc, nên có hai phương trình:

$\frac{60}{x} = \frac{60}{x+15} + \frac{1}{3}$ hay

$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} - \frac{1}{3} = 0$

$3.60(x + 15) - 3.60x - x(x + 15) = 0$

$180x + 2700 - 180x - x^2 - 15x = 0$ hay

$x^2 + 15x - 2700 = 0$

Giải ra được $x = 45$

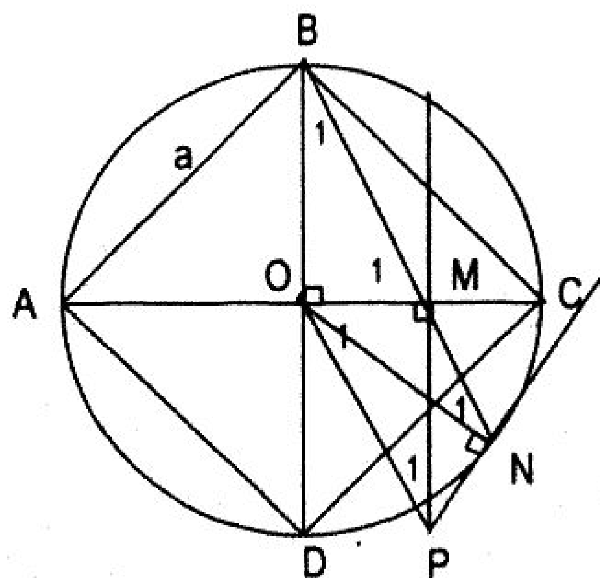
Sau khi thử lại, có kết quả: Vận tốc của xe máy, ô tô là 45km/h; 60km/h.

Bài 3. Hình 71

a) Ta có PM ⊥ AC (theo gt) nên $\widehat{OMP} = 1v$.

Vì NP là tiếp tuyến của đường tròn nên ON ⊥ PN hay $\widehat{ONP} = 1v$.

Ta thấy M và N cùng nhìn OP dưới một góc vuông nên M, N phải nằm trên đường tròn đường kính OP, vậy tứ giác



H.71

OMNP nội tiếp được đường tròn.

b) Theo tính chất của hình vuông ta có BD $\perp$ AC, mặt khác có MP $\perp$ AC (theo gt) nên OB//MP.

Ta có OB = ON (= R) nên ΔOBN cân suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ nhưng $\widehat{N_1} = \widehat{P_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn OM của đường tròn ngoại tiếp tứ giác OMNP), do đó $\widehat{B_1} = \widehat{P_1}$. Mà $\widehat{B_1} + \widehat{M_1} = 1v$ và $\widehat{P_1} + \widehat{O_1} = 1v$ nên $\widehat{M_1} = \widehat{O_1}$. Xét hai tam giác BOM và PMO ta có $\widehat{BOM} = \widehat{POM}$, OM chung, $\widehat{M_1} = \widehat{O_1}$, vậy hai tam giác này bằng nhau suy ra OB = MP.

Tứ giác BOPM có OB//MP, OB = MP, nó là hình bình hành, suy ra BM//OP hay BN//OP.

c) Hai tam giác vuông BOM và BNP có góc B_1 chung nên chúng đồng dạng, suy ra

$\frac{BM}{BD} = \frac{BO}{BN}$ hay BM.BN = BD.BO

Vì AB = a nên BD = $a\sqrt{2}$ và $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, do đó có

$BM.BN = a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2$

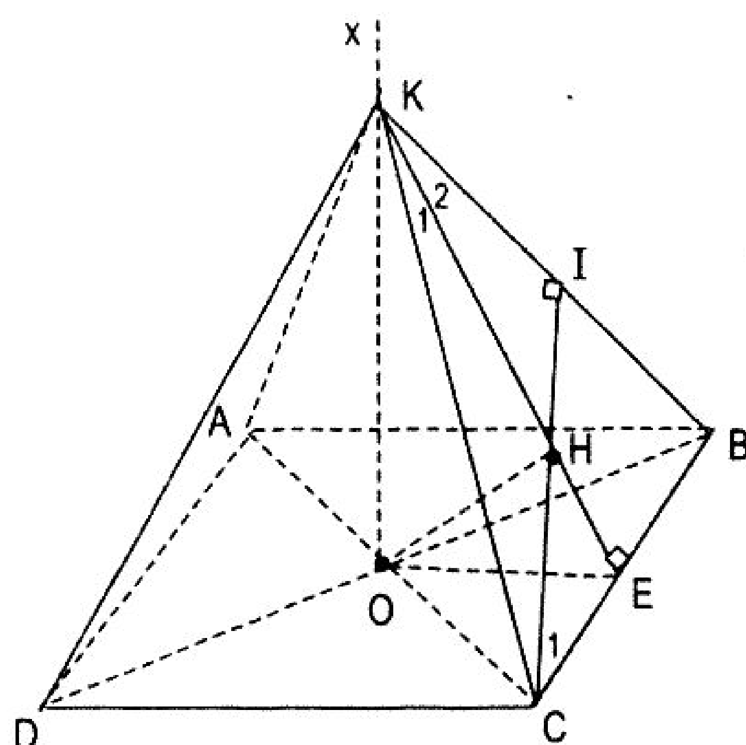
d) Theo hình 72 ta thấy hai tam giác vuông KOC, KOB bằng nhau nên KC = KB hay ΔKBC cân đỉnh K.

Trong ΔKBC dựng các đường cao KE, CI chúng cắt nhau tại H, ta có EC = EB và $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$ (tính chất tam giác cân).

Ta có $\widehat{C_1} = \widehat{K_2}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{K_1}$. Hai tam giác vuông CHE và KCE có $\widehat{C_1} = \widehat{K_1}$ nên đồng dạng, suy ra $\frac{HE}{CE} = \frac{CE}{KE}$. Nhưng OE là

đường trung bình của ΔABC nên $OE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = CE$ do đó $\frac{HE}{OE} = \frac{OE}{KE}$.

Ta thấy hai tam giác vuông OHE và KOE có $\frac{HE}{OE} = \frac{OE}{KE}$ nên chúng đồng dạng suy ra $\widehat{OHE} = \widehat{KOE}$, mà $\widehat{KOE} = 1v$ nên $\widehat{OHE} = 1v$ suy ra $OH \perp KE$ (1)



H.72

Theo giả thiết $Ox \perp (ABCD)$ nên $OK \perp BC$, ta có $KH \perp BC$ suy ra $BC \perp (OKH)$, do đó $OH \perp BC$ (2). Từ (1) và (2) có $OH \perp (KBC)$.

Đề 23

A. Lí thuyết (2 điểm). Học sinh chọn một trong hai đề sau:

Đề 1. Phát biểu hai quy tắc đổi dấu của phân thức. Viết công thức minh họa cho từng quy tắc.

Áp dụng: Thực hiện các phép tính: $\frac{2a^2}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{b-a}$

Đề 2. Phát biểu định lí về góc nội tiếp của một đường

tròn. Chứng minh định lí trong trường hợp tâm O nằm trên một cạnh của góc.

B. Bài toán bắt buộc (8 điểm)

Bài 1.(2,5 điểm). Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right)$$

a) Rút gọn P;

b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$;

c) Tìm các số m để có các giá trị x thỏa mãn $P.\sqrt{x} = m - \sqrt{x}$.

Bài 2 (2 điểm). Giải bài toán bằng cách lập phương trình Một xe tải và một xe con cùng khởi hành đi từ tỉnh A đến tỉnh B. Xe tải đi với vận tốc 40km/h, xe con đi với vận tốc 60km/h. Sau khi mỗi xe đi được nửa đường thì: xe con nghỉ 40 phút rồi chạy tiếp đến B; xe tải trên quãng đường còn lại đã tăng vận tốc thêm 10km/h nhưng vẫn đến B chậm hơn xe con nửa giờ. Hãy tính quãng đường AB.

Bài 3. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, ACvà cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn và AM < AN). Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

a) Chứng minh bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn;

b) Chứng minh góc AOC bằng góc BIC;

c) Chứng minh BI//MN;

d) Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Hà Nội, năm học 1999 - 2000

Lời giải

A. Lí thuyết. Xem SGK

B. Bài tập bắt buộc

Bài 1. a) Rút gọn:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right)$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} : \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \quad (\text{với } x > 0,\ x \neq 1)$$

b) $P > 0$ tức là $\frac{x-1}{\sqrt{x}} > 0$. Do $\sqrt{x} > 0$ nên $P > 0$ khi $x - 1 > 0$ hay $x > 1$.

c) Do x phải thỏa mãn $P.\sqrt{x} = m - \sqrt{x}$ nên

$\frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - m - \sqrt{x}$ hay $x - 1 - m + \sqrt{x} = 0$.

Ta phải giải phương trình bậc hai $x + \sqrt{x} - m - 1 = 0(*)$. Muốn cho phương trình có nghiệm dương thì a và c phải trái dấu (để có 2 nghiệm khác dấu) mà $a = 1$ nên $c = -m - 1 < 0$ hay $m > -1$. Ngoài ra $m \neq 1$ vì khi $m = 1$ thì phương trình (*) sẽ có nghiệm $x = 1$ trái với điều kiện $x \neq 1$.

Bài 2. Gọi quãng đường AB là xkm $(x > 0)$.

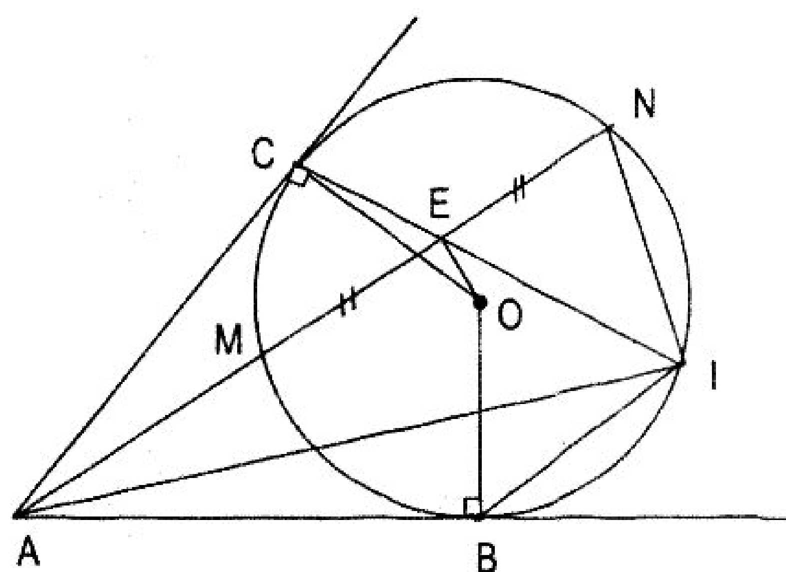
Thời gian xe tải đi quãng đường AB là $\frac{x}{2.40} + \frac{x}{2.50}$ (giờ)

Thời gian xe con đi quãng đường AB là $\frac{x}{60}$ (giờ)

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{x}{80} + \frac{x}{10} - \frac{1}{2} = \frac{x}{60} + \frac{2}{3}$

Giải phương trình được x = 200, thoả mãn điều kiện bài toán

Vậy quãng đường AB dài 200 km.



H.73

Bài 3. Hình 73.

a) Nối OE ta có OE ⊥ MN, lại có OC ⊥ AC (theo gt), suy ra tứ giác ACOE nội tiếp được đường tròn.

b) ΔABO = ΔACO (c.c.c) suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ do đó $\widehat{BOC} = 2\widehat{AOC}$ (1).

Lại có sđ $\widehat{BOC}$ = sđ $\widehat{BMC}$ (2) và sđ $\widehat{BIC} = \frac{1}{2}$sđ $\widehat{BMC}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BIC}$

c) Do tứ giác ACOE nội tiếp (câu a) nên $\widehat{AEC} = \widehat{AOC}$ (cùng chắn cung AC), mà $\widehat{AOC} = \widehat{BIC}$ (câu b), nên $\widehat{AEC} = \widehat{BIC}$ chiếm vị trí góc đồng vị, do đó BI // MN.

d) Nhận thấy hai tam giác AIN và ABN có diện tích bằng nhau vì có đáy AN chung và đường cao bằng nhau

(khoảng cách giữa hai đường thẳng BI và MN song song theo câu c), suy ra $S_{\Delta AIN}$ lớn nhất khi $S_{\Delta ABN}$ lớn nhất.

$S_{\Delta ABN}$ lớn nhất khi ba điểm B, O, N thẳng hàng. Do đó nối BO và kéo dài cắt (O) tại N'. Nối AN' cắt (O) tại M'. Vậy AM'N' là vị trí của cát tuyến AMN phải tìm.

Đề 24

I. Lí thuyết (2 điểm) Thí sinh chọn một trong hai câu sau đây:

1) Phát biểu và chứng minh định lí Viét (hệ thức Viét) phần thuận.

Áp dụng: Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 1 = 0$

a) Định m để phương trình có nghiệm

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm (nếu có) của phương trình. Tính A $(x_1 + x_2)^2 + 3x_1x_2$ theo m.

2) Phát biểu tính chất thuận và đảo của tiếp tuyến tại một điểm thuộc đường tròn.

Áp dụng: Cho đường tròn (O; R) có tâm là O. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) cách tâm O một khoảng bằng 2R, ta kẻ một tiếp tuyếm với đường tròn (O), tiếp tuyến này tiếp xúc với (O) tại M. Tính AM theo R.

II. Bài toán bắt buộc (8 điểm)

Bài 1 (1, 5 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

Bài 2 (2 điểm). Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P) và đường thẳng (D): $y = -x - 1$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Tìm toạ độ giao điểm I của (P) và (D).

Bài 3 (1 điểm). Tính (rút gọn):

$$A = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} (a > 0, a \neq 1)$$

Bài 4 (3,5 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O; R). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp được

b) Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại P và Q. Chứng minh $\widehat{BPQ} = \widehat{BCQ}$, suy ra EF song song với PQ.

c) Chứng minh OA vuông góc với EF.

d) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF theo R.

Thành phố Hồ Chí Minh,
năm học 1999 - 2000

Lời giải

I. Lí thuyết. Xem SGK

II. Bài toán bắt buộc

Bài 1. a) Đặt $x^2 = y > 0$, phương trình trùng phương đã cho trở thành $2y^2 + 5y - 7 = 0$.

$\Delta = 25 + 56 = 81 = 9^2$. Từ đó $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{7}{2}$ (loại)

Ta có $x^2 = y = 1$, vậy $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

b) $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow - \begin{cases} 6x + 4y = -4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

$$x = -5$$

Thay $x = -5$ vào $3x + 2y = -2$

được $2y = -2 - 3x = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x = -5,\ y = 6\frac{1}{2})$

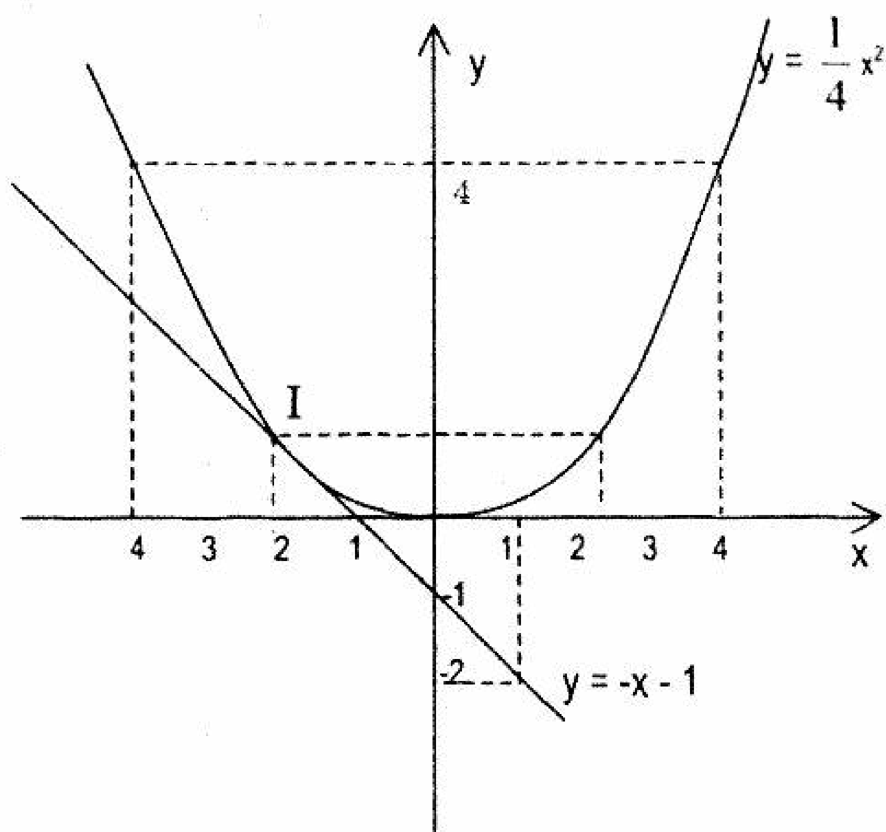
Bài 2. a) Lập bảng một số giá trị của x và y:

x	0	-1
y	-1	0

x	...	-4	-2	0	2	4	...
y	...	4	1	0	1	4	...

Đồ thị (P) và đường thẳng (D) như ở hình vẽ

b) Hoành độ giao điểm I là nghiệm của phương trình $\frac{1}{4}x^2 = -x - 1$ hay $x^2 = -4x - 4 \Rightarrow x^2 + 4x = 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0$ mà nghiệm là $x_1 = x_2 = -2$. Từ đó có $y = 1$.



Vậy I (-2 ; 1).

Bài 3

$$A = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}} \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)} - \frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}$$

$$= \frac{a+\sqrt{a}+1\sqrt{a}-a-1}{\sqrt{a}} = 2.$$

*Bài 4.*Hình 74.

a) BE ⊥ AC, CF ⊥ AB (theo gt) nên $\widehat{BEC} = \widehat{CFB} =$ 1v. Như vậy là F và E cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên F và E phải nằm trên đường tròn đường kính BC (theo quỹ tích cung chứa góc), vậy tứ giác BFEC nội tiếp được.

b) Ta có $\widehat{BPQ} = \widehat{BCQ}$ (cùng chắn cung BQ của đường tròn O), mặt khác có $\widehat{FEB} = \widehat{BCQ}$ (cùng chắn cung BF của đường tròn đường kính BC), suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{BPQ}$, chiếm vị trí góc đồng vị nên EF // PQ.

H.74

c) Hai tam giác vuông BEA và CFA có góc nhọn A chung suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{FCA}$ do đó $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{AQ}$ hay A là điểm chính giữa của cung QP.

Đường kính OA đi qua điểm chính giữa của cung QP nên $OA \perp QP$.

$QP \parallel EF$, $OA \perp QP \Rightarrow OA \perp EF$.

d) Vẽ đường kính AOK, dễ dàng chứng minh được BHCK là hình bình hành, do đó đường chéo HK đi qua trung điểm I của đường chéo BC.

Nối OI ta có $OI \perp BC$, do $BC = R\sqrt{3}$ nên $\widehat{BOC} = 120^o$ và $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 30^o$, suy ra $OI = \dfrac{R}{2}$.

Tứ giác AFHE có tổng hai góc đối bằng 2v nên nội tiếp đường tròn đường kính AH, đường tròn này cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác AFE.

Ta có OI // AH vì cùng vuông góc với BC, nên OI là đường trung bình của ΔAHK nên $OI = \dfrac{AH}{2}$ hay $AH = 2OI$

$= 2 \cdot \frac{R}{2} = R$. Vậy bán kính đường trong ngoại tiếp ΔAEF bằng $\frac{1}{2}AH = \frac{R}{2}$.

Đề 25

I. Lí thuyết (2 điểm) Thí sinh chọn một trong hai đề sau:

Đề 1. 1) Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn số và viết công thức nghiệm của phương trình bậc hai đó.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Đề 2. 1) Phát biểu định nghĩa về đường thẳng song song với mặt phẳng.

2) Cho tứ diện SABC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB, SC. Chứng minh đường thẳng IK song song với mặt phẳng (ABC)

II. Bài toán bắt buộc (8 điểm)

Bài 1 (1,5 điểm)

1) Rút gọn $A = 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$

2) Chứng minh $x + \sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} 2x - 1 & \text{với } x \geq 1 \\ 1 & \text{với } x < 1 \end{cases}$

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

Bài 2 (1,5 điểm) Cho hai hàm số $y = x^2$ (P) và $y = 3x - 2$ (d)

1) Vẽ (P) và (d) trên cùng mặt phẳng toạ độ.

2) Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính

3) Lập phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và (d') cắt (P) tại M có hoành độ là -1.

Bài 3 (1,5 điểm). Một nhóm học sinh được giao nhiệm vụ trồng 80 cây thông non. Nhưng khi thực hiện nhóm ấy được tăng cường thêm 4 bạn, do đó mỗi bạn trồng ít hơn 1 cây so với dự định. Hỏi lúc đầu nhóm có bao nhiêu học sinh? Biết rằng số cây mỗi bạn trồng như nhau.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn (AB < AC), vẽ đường cao AH và từ H hạ HK, HM lần lượt vuông góc với AB, AC. Gọi J là giao điểm của AH và MK.

1) Chứng minh tứ giác AMHK nội tiếp một đường tròn

2) Chứng minh hệ thứ JA. JH = JK.JM.

3) Từ C kẻ Cx vuông góc với AC và Cx cắt AH kéo dài tại D. Vẽ HI, HN lần lượt vuông góc với BD, DC. Chứng minh $\widehat{HKM} = \widehat{HCN}$

4) Chứng minh bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

Lâm Đồng, năm học 1999 - 2000

Lời giải

I. Lí thuyết. Xem SGK

II. Bài toán bắt buộc

*Bài 1.*1) Rút gọn $A = 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{4.5} - 2\sqrt{9.5} + 4\sqrt{5} = 3.2\sqrt{5} - 2.3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$

2) Nếu $x \geq 1$ thì $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$

Nếu $x < 1$ thì $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$, do đó

$$x + \sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} x + x - 1 = 2x - 1 & \text{với } x \geq 1 \\ x + 1 - x = 1 & \text{với } x < 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

$$+\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$5x = 5 \Rightarrow x = 1$$

$2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x = 3 - 2.1 = 3 - 2 = 1$

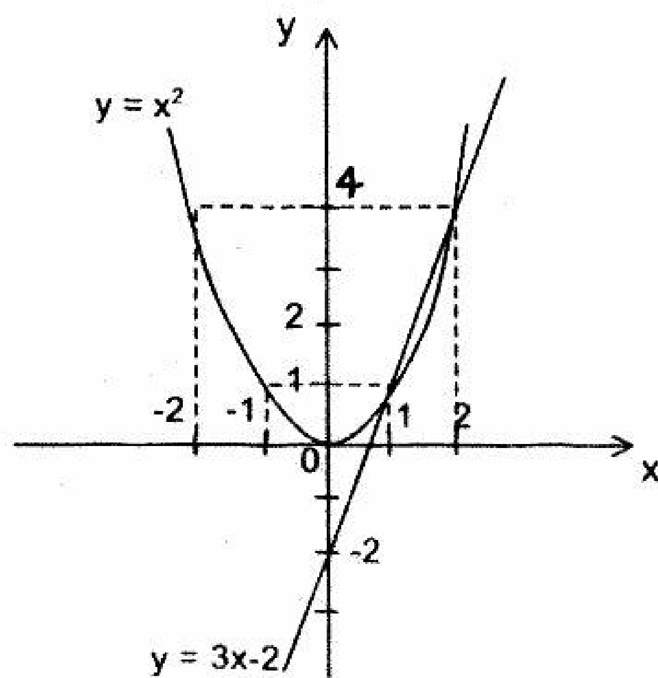
Nghiệm của hệ là $(x = 1; y = 1)$

Bài 2

1) Lập bảng một số giá trị của x và y

x	0	1
y	-2	1

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	4	1	0	1	4	...



2) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $x^2 = 3x - 2 = 0$ hay $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$\Delta = 9 - 8 = 1$; $x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$; $\quad x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

Vậy toạ độ giao điểm là (2 ; 4); (1 ; 1).

3) Vì hai đường thẳng song song có hệ số góc a' = a và b' ≠ b nên phương trình đường thẳng (d') song song với (d) có dạng y = 3x + b'.

Hai đồ thị này cắt nhau tại M có hoành độ là -1 nên:

$(-1)^2 = 3(-1) + b' \Rightarrow b' = 4$.

Vậy phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và (d') cắt (P) tại M có hoành độ là -1 là y = 3x + 4.

Bài 3. Gọi x là số học sinh có lúc đầu của nhóm (x nguyên dương) thì lúc đầu mỗi bạn được giao trồng $\dfrac{80}{x}$ cây.

Nhưng khi thực hiện có thêm 4 bạn nữa nên số học sinh tham gia trồng cây là (x + 4) bạn, do đó mỗi bạn đã trồng được $\dfrac{80}{x+4}$ cây.

Theo đầu bài có phương trình:

$\dfrac{80}{x} - \dfrac{80}{x+4} = 1$ hay $x^2 + 4x - 320 = 0$.

Giải ra được x = 16, thoả mãn điều kiện bài toán.

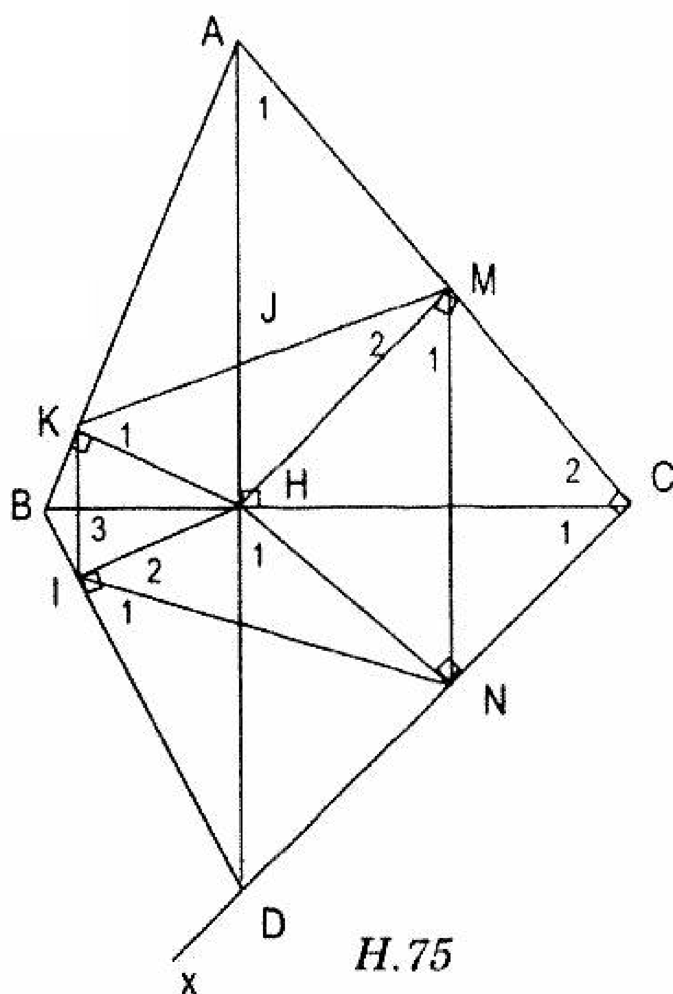
Vậy số học sinh tham gia trồng câu lúc đầu là 16em.

Bài 4. Hình 75.

1) HK ⊥ AB, HM ⊥ AC (theo gt) nên $\widehat{AKH} = \widehat{AMH} = 1v$.

Tứ giác AMHK có $\widehat{AKH} + \widehat{AMH} = 2v$, nên nội tiếp được đường tròn đường kính AH.

2) $\widehat{JAM} = \widehat{JKH}$ (cùng chắn cung HM của đường tròn đường kính AH), $\widehat{AJM} = \widehat{KJH}$ (góc đối đỉnh)



H.75

Vậy $\Delta JAM \backsim \Delta JKM$ (g.g) suy ra $\frac{JA}{JK} = \frac{JM}{JK}$ hay JA.JH=JK.JM.

3) Ta có Cx ⊥ AC (theo gt) nên $\widehat{C_1} + \widehat{C_2}$ = 1v, mặt khác trong tam giác vuông AHC ta có $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} =$ 1v, suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$. Nhưng $\widehat{A_1} = \widehat{K_1}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{K_1} = \widehat{C_1}$ hay $\widehat{HKM} = \widehat{HCN}$.

4) Tứ giác HMCN nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{C_1} = \widehat{M_1}$ (cùng chắn cung HN), nhưng $\widehat{C_1} = \widehat{H_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), do đó $\widehat{M_1} = \widehat{H_1}$ (1).

Tứ giác HNDI cũng nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{I_1} = \widehat{H_1}$ (2) (cùng chắn cung DN). Từ (1) và (2) có $\widehat{M_1} = \widehat{I_1}$.

Biết $\widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 1v$ (vì HI ⊥ BD) nên $\widehat{M_1} + \widehat{I_2} = 1v$ (3).

Chứng minh tương tự như trên có $\widehat{M_2} + \widehat{I_3} = 1v$ (4).

Từ (3) và (4) ta nhận thấy tứ giác IKMN có $\widehat{KIN} + \widehat{KMN} = 2v$ nên nó nội tiếp được, suy ra bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

Đề 26

I. Lí thuyết (2 điểm) Học sinh chọn một trong hai đề sau để làm

Đề 1. Phát biểu và viết công thức của hệ thức Viét

Áp dụng: Tính nhẩm nghiệm của phương trình sau:

$x^2 - 3x = 7 = 4x - 3.$

Đề 2. Phát biểu và chứng minh định lí về mối liên hệ giữa số đo của góc có đỉnh bên ngoài đường tròn với số đo các cung bị chắn giữa hai cạnh của góc đó.

II. Bài toán (8 điểm)

Bài 1 (2 điểm)

Cho $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a}{b-a}\right) : \left(\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{a}}{a+b+2\sqrt{ab}}\right)$

với điều kiện $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 0$.

a) Rút gọn biểu thức

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$

c) Tìm giá trị của a và b trong trường hợp $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ thì $A = 1$.

Bài 2 (2 điểm)

Cho phương trình bậc 2 ẩn x:

$x^2 - 2(2k + 1)x + 2k - 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với $k = 1$

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1). Chứng minh biểu thức;

$A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc vào giá trị

của k.

Bài 3 (4 điểm). Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại điểm thứ hai F, G.

a) Chứng minh rằng ADEC, AFBC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh AC song song với FG.

c) Chứng minh các đường thẳng AC, DE, BF đồng quy

d) Từ A vẽ đoạn AP = a, vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (PBC) biết AB = AC = b.

Hà Nam, năm học 1999 - 2000.

Lời giải

I. Lí thuyết. Xem SGK

II. Bài toán

*Bài 1.*a) Với $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, biểu thức A rút gọn bằng: $A = \dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a(b-a)}$.

b) Tính giá trị của A khi:

$a = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$, $b = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{-2\left(3+2\sqrt{2}\right)} = -\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

c) Từ $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ suy ra b = 4a

Ta có

$$A = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a(b-a)} = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{4a}\right)^2}{a(4a-a)} = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+2\sqrt{a}\right)^2}{a.3a}$$

$$= \frac{\sqrt{a}.9a}{3a^2} = \frac{3\sqrt{a}}{a}.$$

Do A = 1 nên có $\frac{3\sqrt{a}}{a} = 1 \Rightarrow a = 3\sqrt{a}$ hay $a - 3\sqrt{a} = 0$ do đó $\sqrt{a}(\sqrt{a} - 3) = 0$.

Vì a > 0 nên $\sqrt{a} \neq 0$, do đó $\sqrt{a} - 3 = 0 \Rightarrow a = 9$.

b = 4a = 4.9 = 36.

Vậy với $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ và A = 1 thì a = 9 và b = 36.

Bài 2. a) Với k = 1, có phương trình $x^2 - 6x - 2 = 0$

$\Delta' = 9 + 2 = 11$; $x_1 = 3 + \sqrt{11}$; $x_2 = 3 - \sqrt{11}$.

b) $A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) = x_1 - x_1x_2 + x_2 - x_1x_2$

$= x_1 + x_2 - 2x_1x_2$.

Theo hệ thức Viét có $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(2k+1)$ và

$P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = 2k - 4$, do đó:

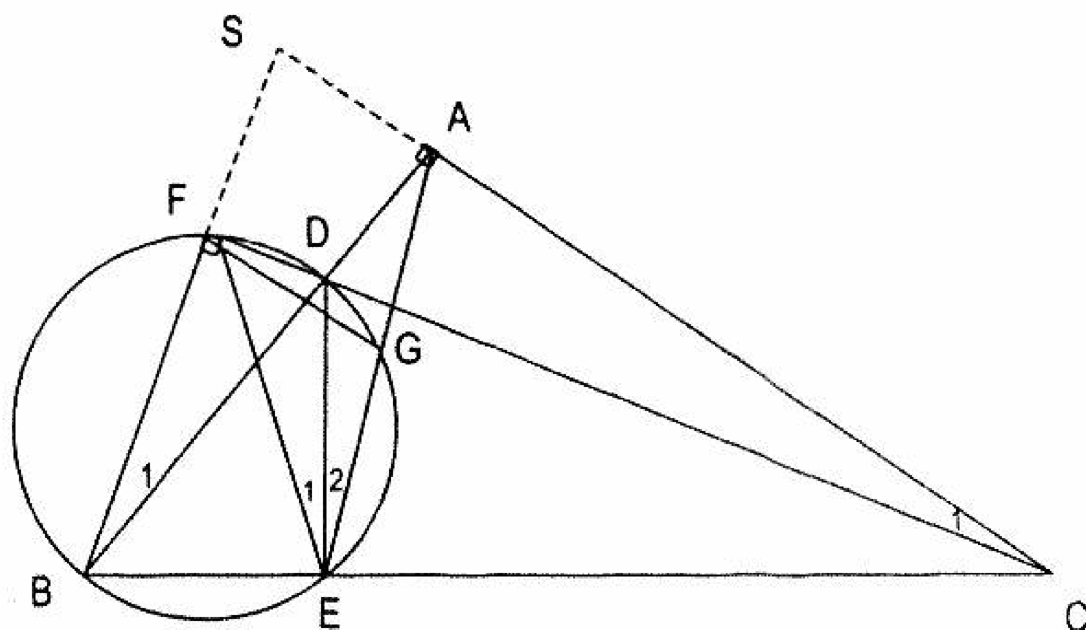
$A = 2(2k + 1) - 2(2k - 4)$

$= 4k + 2 - 4k + 8 = 10.$

Vậy biểu thức A không phụ vào giá trị của k.

Bài 3. Hình 76.

a) Ta có $\widehat{BED} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) do đó $\widehat{DEC} = 1v$, $\widehat{DAC} = 1v$ (theo gt), vậy tứ giác ADEC nội tiếp đường tròn đường kính BD.



H.76

Ta có $\widehat{BFC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BD)

Vì $\widehat{BFC} = \widehat{BAC} = 1v$ nên F và A cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên F và A phải nằm trên đường tròn đường kính BC (theo quỹ tích cung chứa góc), vậy tứ giác AFBC nội tiếp được.

b) $\widehat{C_1} = \widehat{E_2}$ (cùng chắn cung AD của đường tròn đường kính DC), $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (cùng chắn cung AF của đường tròn đường kính BC), $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$ (cùng chắn cung FD của đường

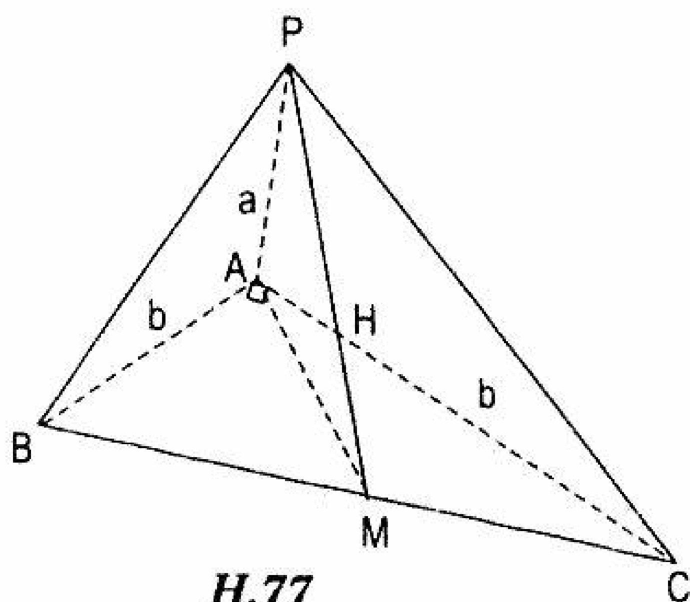
tròn đường kính BD). Từ đó suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ hay $\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{DG}$ tức là D là điểm chính giữa của cung FG. Đường kính BD đi qua điểm chính giữa của cung FG nên BD ⊥ FG mà BD ⊥ AC (gt) do đó AC // FG.

c) Kéo dài BF và CA, chúng cắt nhau tại S. Trong ΔSBC có hai đường cao BA và CF cắt nhau tại D nên DS phải là đường cao thứ ba tức là DS ⊥ BC. Mặt khác ta lại có DE ⊥ BC (vì $\widehat{DEC} = 1v$). Biết rằng từ điểm D ngoài BC chỉ dựng được một và chỉ một đường vuông góc với BC nên DS ≡ DF hay ED đi qua S. Vậy AC, DE, BF đồng quy tại S.

d) Hình vẽ 77.

Gọi M là trung điểm của BC thì AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC của tam giác vuông cân ABC, nên

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$



H.77

Vì PA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên PA ⊥ AM. Trong tam giác vuông PAM hạ AH ⊥ PM thì AH chính là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (PBC).

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông PAM, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{AM^2}; \quad \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{b^2}{2}} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} = \frac{2a^2 + b^2}{a^2 b^2}.$$ Từ đó suy ra:

$$AH = \frac{ab}{\sqrt{2a^2 + b^2}}.$$

Đề 27

I. Lý thuyết (2 điểm). Chọn một trong hai câu sau đây:

1) Định nghĩa phương trình bậc nhất hai ẩn số

Áp dụng: Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình: $3x + y = 1$.

2) Chứng minh định lí: "Trong một đường tròn, nếu đường kính vuông góc với một dây cung thì chia dây cung ấy thành hai phần bằng nhau".

II. Các bài toán bắt buộc (8 điểm)

Bài 1 (1 điểm). Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

Bài 2 (1điểm). Môt khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và có diện tích bằng $432m^2$. Tính chu vi của khu vườn ấy.

Bài 3 (1,5 điểm). Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2$ (P) và đường thẳng (D): $y = x - 2$ trên cùng một hệ trục toạ độ. Xác định toạ độ các giao điểm của (P) và (D) bằng phép toán.

Bài 4 (1 điểm). Tính (rút gọn) các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$

b) $B = \sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

Bài 5 (3,5 điểm). Cho tam giác ABC (AB < AC) có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O). Hai đường cao AD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh các tứ giác ACDE và BEHD là các tứ giác nội tiếp được.

b) Đường thẳng AD cắt đường trong (O) tại K khác A. Chứng minh HD = KD.

c) Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đường thẳng OM cắt cung nhỏ BC tại N. Chứng minh $\widehat{BCN} = \widehat{CAN}$.

d) Đường thẳng AN lần lượt cắt các đường thẳng BH và CH tại I và J. Chứng minh tam giác HIJ là một tam giác cân.

Thành phố Hồ Chí Minh năm học 2000 - 2001

Lời giải

I. Lý thuyết - Xem SGK

II. Bài toán

Bài 1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$

$x = 4$

Từ 2x - y = 1 ⇒ y = 2x - 1 = 2.4 - 1 = 7

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x = 4; y = 7)

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

Từ $3x + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -3x \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$

$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}\cdot(-2) = 3$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là ($x = -2$; $y = 3$)

Bài 2. Gọi chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật là xn ($x > o$), thì chiều dài của khu vườn là 3xm.

Theo đầu bài có phương trình:

$3x, x = 432$

$\Rightarrow 3x^2 = 432 \Rightarrow x^2 = 144 = 12^2$

$\Rightarrow x = 12; 3x = 3.12 = 36$.

$x = 12$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Chu vi khu vườn hình chữ nhật là:

$(x + 3x).2 = (12 + 36).2 = 96$ (m)

Bài 4

a) $A = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$

$= 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1$.

b) $B = \sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

$= \sqrt{3+2\sqrt{3}.\sqrt{2}+2} + \sqrt{3-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+2}$

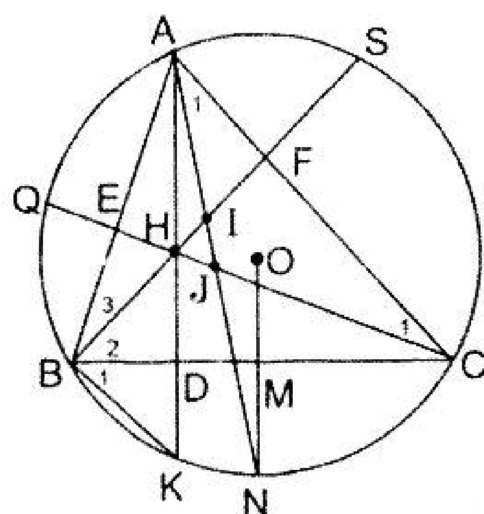
$= \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$

$= \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

Bài 5. Hình 78

a) Vì AD và CE là hai đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{ADC} = \widehat{AEC} = 1v$. Như vậy là D và E cùng nhìn AC dưới một góc vuông nên D và E phải nằm trên đường tròn đường kính AC (theo quỹ tích cung chứa góc), do đó bốn điểm A, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn, vậy tứ giác ACDE nội tiếp được.

Theo giả thiết suy ra $\widehat{HEB} = \widehat{HDB} = 1v$, do đó có $\widehat{HEB} + \widehat{HDB} = 1v$, vậy tứ giác BEHD nội tiếp được.



H.78

b) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CK}$), suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ hay BD là tia phân giác của $\widehat{HBK}$. Tam giác HBK có BD vừa là đường cao, vừa là phân giác nên ΔBHK cân. Trong tam giác cân BHK thì đường cao BD cũng là trung tuyến nên DH = DK.

c) Vì M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$ (theo tính chất đối xứng của đường tròn) suy ra $\overset{\frown}{NB} = \overset{\frown}{NC}$ (1)

sđ $\widehat{BCN} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NB}$, sđ $\widehat{CAN} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NC}$, vậy $\widehat{BCN} = \widehat{CAN}$.

d) Cho đường cao BH cắt AC tại F, cắt đường tròn (O) tại S. Ta có $\widehat{B_3} = \widehat{C_1}$ (vì cùng phụ với $\widehat{BAC}$) suy ra $\overset{\frown}{AS} = \overset{\frown}{AQ}$ (2).

sđ $\widehat{HIJ} = \frac{1}{2}$ sđ $(\overset{\frown}{AS} + \overset{\frown}{NB})$, sđ $\widehat{HJI}$ = sđ $(\overset{\frown}{AQ} + \overset{\frown}{NC})$, dựa vào (1) và (2) có $\widehat{HIJ} = \widehat{HJI}$ do đó ΔHIJ cân đỉnh A.

Đề 28

A. Lý thuyết (2 điểm). **Chọn một trong hai đề sau:**

Đề 1. Thế nào là phép khử mẫu của biểu thức lấy căn. Viết công thức tổng quát.

Áp dụng: Hãy tính $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Đề 2. Phát biểu và chứng minh định lí góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

B. Bài tập bắt buộc (8 điểm)

Bài 1 (2,5 điểm). Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}+\frac{3}{\sqrt{x}-2}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right)$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = 6 - 2\sqrt{5}$

c) Tìm các giá trị của n để có x thoả mãn

$\left(\sqrt{x}+1)\right)P > \sqrt{x}+n.$

Bài 2. (2 điểm). Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81 km, và ngược dòng 105km. Một lần khác cũng trên dòng sông đó, ca nô này chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và vận tốc khi ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài 3 (3,5 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB =

2R, dây MN vuông góc với AB tại I sao cho IA < IB. Trên đoạn MI lấy điểm E ($E \neq M$ và $E \neq I$). Tia AE cắt đường tròn tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh tứ giác IEKB nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh các tam giác AME, AKM đồng dạng và $AM^2 = AE.AK$.

c) Chứng minh $AE.AK + BI.BA = 4R^2$.

d) Xác định vị trí điểm I sao cho chu vi tam giác MIO đạt giá trị lớn nhất.

Hà Nội, năm học 2000 - 2001

Lời giải

A- Lý thuyết. Xem SGK

B- Bài toán

Bài 1. a) Rút gọn P

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}+\frac{3}{\sqrt{x}-2}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-4+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)-\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

ĐK: $x > 0; x \neq 4$

$$= \frac{4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{-4} = 1-\sqrt{x}.$$

b) Tính giá trị của P biết:

$x = 6 - 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{5}.1 + 1 = \left(\sqrt{5}-1\right)^2$

$P = 1 - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{5} + 1 = 2 - \sqrt{5}$.

c) Tìm các giá trị của n để có x thoả mãn bất đẳng thức:

$\left(\sqrt{x}+1\right)P > \sqrt{x} + n$ (*)

Ta có $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{x}\right) > \sqrt{x} + n$

$1 - x > \sqrt{x} + n$

$x + \sqrt{x} < 1 - n$

Do $x > 0$ nên suy ra $1 - n > 0 \Rightarrow n < 1$.

Vậy khi $n < 1$ thì có x thoả mãn bất đẳng thức (*)

Bài 2. Gọi vận tốc ca nô khi đi xuôi dòng là xkm/h và vận tốc ca nô khi đi ngược dòng là y km/h ($x > y > 0$)

Nếu xuôi dòng 81km thì thời gian xuôi dòng là $\frac{81}{x}$h và ngược dòng 105 km thì thời gian ngược dòng là $\frac{105}{y}$h. Theo đầu bài có phương trình (1):

$$\frac{81}{x} + \frac{105}{y} = 8 \qquad (1)$$

Nếu xuôi dòng 54 km thì thời gian xuôi dòng là $\frac{54}{x}$h và ngược dòng 42 km thì thời gian ngược dòng là $\frac{42}{y}$h. Theo đầu bài có phương trình (2):

$$\frac{54}{x} + \frac{42}{y} = 4 \qquad (2)$$

Vậy có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{81}{x} + \frac{105}{y} = 8 & (1) \\ \frac{54}{x} + \frac{42}{y} = 4 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình được x = 27, y = 21, thoả mãn điều kiện bài toán.

Vậy vận tốc ca nô xuôi dòng là 27 km/h

Và vận tốc ca nô ngược dòng là 21 km/h.

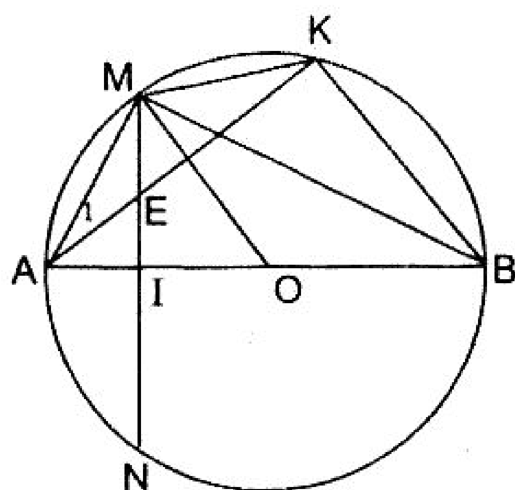
Bài 3. Hình 79

a) Vì MN ⊥ AB nên $\widehat{EIB} = 1v$, $\widehat{AKB} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Tứ giác IEKB có $\widehat{EIB} + \widehat{EKB} = 2v$ nên nội tiếp được đường tròn.

b) Vì MN ⊥ AB nên $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$. Ta có $\widehat{AME} = \widehat{AKM}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Hai tam giác AME và AKM có góc A_1 chung và $\widehat{AME} = \widehat{AKM}$, nên chúng đồng dạng, suy ra $AM^2 = AE.AK$ (1)

c) Ta có $\widehat{AMB} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Trong tam giác vuông AMB có đường cao MI, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông có $MB^2 = BI.BA$ (2)



H.79

Cộng (1) và (2) vế với vế có:

$MA^2 + MB^2 = AE.AK + BI.BA$ (3)

Trong tam giác vuông AMB, theo định lí Pitago có:

$MA^2 + MB^2 = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$ (4)

Từ (3) và (4) có $AE.AK + BI.BA = 4R^2$.

d) Chu vi của tam giác MIO là MO + MI + IO.

Biết MO là bán kính đường tròn đã cho nên chu vi tam giác MIO lớn nhất khi và chỉ khi (MI + IO) lớn nhất.

Ta có $(MI + IO) \leq 2(MI^2 + IO^2) = 2R^2$.

Vậy chu vi tam giác MIO lớn nhất khi

$IO = MI = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, tức là vị trí điểm I trên OA phải cách O một đoạn bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

35 ĐỀ TOÁN HAY DÙNG CHO ÔN LUYỆN CUỐI CẤP THCS

Mã số: 01. 195.ĐH 2001 - 503.2001
In 1000 cuốn tại Công ty Sách và Thiết bị trường học Hải Phòng
Số xuất bản: 45 / 503 / CXB. Số trích ngang 331 KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV/2001